Un relèvement d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur la double construction cobar

Alexandre Quesney

l'université nantes angers le mans
PÔLE DE RECHERCHE ET D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Alexandre QUESNEY

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques, section CNU 25
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 08 janvier 2014

Un relèvement d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur la double construction cobar

JURY

Présidente :	**Mme Kathryn HESS BELLWALD**, Professeur des universités, École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Rapporteur :	**M. Benoît FRESSE**, Professeur des universités, Université de Lille
Examinateurs :	**Mme Muriel LIVERNET**, Maître de conférences, Université Paris 13
	M. Jean-Claude THOMAS, Professeur émérite, Université d'Angers
Invitée :	**Mme Birgit RICHTER**, Professeur des universités, Université d'Hambourg
Directeur de thèse :	**M. Vincent FRANJOU**, Professeur des universités, Université de Nantes
Co-directeur de thèse :	**M. Hossein ABBASPOUR**, Maître de Conférences, Université de Nantes

* * *

Rapporteur :	**M. Clemens BERGER**, Maître de conférences, Université de Nice

Table des matières

Introduction **7**

I Résultats algébriques **13**

1 Objets de base **15**
1.1 Gèbres différentielles graduées 15
1.2 Constructions bar-cobar 24

2 Les G-(co)algèbres homotopiques **29**
2.1 Algèbres et cogèbres de Hirsch, G-algèbres et G-cogèbres homotopiques 29
2.2 Cogèbres de Hirsch, G-cogèbres homotopiques 36
2.3 Algèbres de Batalin-Vilkovisky et BV-algèbres homotopiques à la Gerstenhaber-Voronov 38

3 Construction cobar sur des gèbres **41**
3.1 Structure de G-algèbre homotopique sur la construction cobar d'une dg-bigèbre . 42
3.2 BV-algèbre homotopique sur la construction cobar d'une dg-algèbre de Hopf involutive 44
3.3 Critère d'involutivité de l'antipode sur la construction cobar d'une G-cogèbre homotopique 45

II Applications topologiques **49**

4 Sur la double construction cobar d'un ensemble simplicial **51**
4.1 Ensembles simpliciaux, suspensions 51
4.2 Coproduit de Baues 53
4.3 Structure de G-cogèbre sur le complexe d'un ensemble simplicial ; formalité . . . 56

5 Relèvement de structure sur la double construction cobar **65**
5.1 Relèvement de la structure d'algèbre de Gerstenhaber restreinte de F. Cohen . . . 65
5.2 Relèvement de la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky de E. Getzler 74

6 Structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar dans le cas rationnel **77**

Bibliographie **83**

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon co-encadrant, Hossein Abbaspour, pour la disponibilité dont il a fait preuve tout au long de ces années. Ses encouragements constants et ses conseils furent très motivants. Je le remercie de m'avoir accepté en thèse et de m'avoir guider vers le monde des algèbres homotopiques.

Je remercie vivement mon directeur de thèse, Vincent Franjou. Il sut être disponible et de bon conseil, m'apportant parfois le point de vue qui me faisait défaut. Je le remercie également pour m'avoir initié au domaine de la topologie algébrique notamment à travers le premier stage de M2.

Je remercie Benoît Fresse et Clemens Berger pour avoir accepté de rapporter mon travail. Je suis également très reconnaissant envers Kathryn Hess, Muriel Livernet, Birgit Richter et Jean-Claude Thomas d'avoir accepté d'être membres de mon jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Un grand merci à Jean-Claude Thomas pour ses multiples conseils et son soutien. Son intérêt pour mon travail ainsi que nos discussions furent pour moi très encourageantes et stimulantes ; elles ont certainement contribué à améliorer l'exposition de mes résultats.

Merci également à Muriel Livernet de m'avoir accordé tant de temps et prodigué de nombreux conseils. Sa curiosité contagieuse m'a permis d'éclaircir de nombreux points, de considérer de nouvelles pistes et d'entrevoir de nouvelles idées.

Je souhaite remercier de manière générale tous les membres du laboratoire Jean Leray qui contribuent à en faire un environnement propice à la recherche, à la fois studieux et convivial. En particulier, je remercie le personnel administratif et technique pour sa disponibilité et sa gentillesse.

Je dévie maintenant vers la formidable équipe des thésards.

Je ne peux que débuter par mon co-bureau permanent, Vivien. Son *e-humeur* toujours au beau fixe et jamais simulée fut un vrai enchantement. Sa passion pour toutes sortes de jeux et énigmes, sa culture et son engouement pour les programmes de scores en tout genres n'auront de cesse de m'impressionner. Je le remercie pour toutes les discussions insensées que nous avons eues, pour ses (tentatives d') expériences sur Bob, pour les pauses cafés...

Merci à mon co-bureau Thomas pour ses *informations du jour* parfois douteuses, sa phrase quotidienne : *"Alors, quelle est l'énigme du jour ?"* au dénouement Legendrien parfois complexe, sa patience lors de ma période "pré-soutenance" et l'adoption du cher poisson Eugénio.

Merci à Vincent, co-bureau temporaire de passage à Nantes, pour son accent *non*-Marseillais et sa mauvaise foi sur le temps nantais.

Merci à Julien, tout premier co-bureau, fervent participant à la pause goûter à base de Nutella. Son accueil dans le froid d'une Toulouse hivernale fut toujours chaleureux. Merci aussi pour les vacances (encore dans le froid !) à travers cette Argentine montagneuse ; je te dois au passage mon addiction à la *Yerba Maté*...

Enfin, un co-bureau improbable dont la co-habitation fut de mesure presque nulle, Tristan. Je le remercie pour ses parties de *Taroinches* coinchées plus que de raisons, sa bonne humeur constante, ses compétences LaTeX-iennes fortes utiles et pour m'avoir fait découvrir le site *xkcd*.

Je remercie chaleureusement Céline pour sa bonne humeur quotidienne, son dynamisme bondissant et bien sûr, pour toutes les soirées Gargouille trop arrosées, les soirées FIFA, Sorpio ou autres jeux et aussi, malheureusement, les soirées thématiques *Ail & Citron* et *Croque-Monsieur Knaki-Moutarde*. Je la remercie également de sa collaboration musicale et d'avoir été la vedette du film *L'insoutenable jusqu'à la soutenance*.

Merci à Carlos de m'avoir sans cesse soutenu et encouragé mais aussi pour m'avoir empêché de travailler, principalement en me forçant à aller grimper. Je le remercie également pour son fameux *gâteau de Carmélite* à la croissance exponentielle, les pauses chocolat-café des rares midis ensoleillés et pour le vélo qu'il me prête.

Merci à Alex U pour ses nombreux Dingbats, Christophe pour sa folie et nos nombreuses discussions, Ilaria pour avoir mis à jour une dépendance entre mon humeur et la météo, Gilberto pour sa vision du monde et sa précieuse recette de pizzas, Carl et Martina pour tout, Mood-e pour son surnom tunisien, Virgile pour sa démarche nonchalante et les soirées raclettes, Anne pour tous ses conseils, Antoine pour ses diverses coupes de cheveux, Salim pour ses discussions mathématiques et/ou improbables.

Bon courage aux derniers arrivés, Damien, Florian, Pierre, Valentin et Victor, avec lesquels j'espère partager de bons moments.

Pour finir, je remercie tous mes amis ; les mots ne sauraient trouver ici la place suffisante à l'expression de ce que je leur dois.

Merci à ceux qui, de près ou de loin, m'ont soutenu et encouragé.

Introduction

Le propos principal de ce mémoire de thèse est d'établir l'existence d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près sur la double construction cobar d'un ensemble simplicial.

Les algèbres de Batalin-Vilkovisky (ou BV-algèbres) sont apparues suites aux travaux de I. Batalin et G. Vilkovisky [BV81] en théorie de jauge. Elles interviennent dans de nombreux domaines, par exemple :

- en géométrie non-commutative (cohomologie de Hochschild [FTVP04, Men09, Tra08, TT00], conjecture de Deligne cyclique [TZ04]) ;
- en physique théorique (BRST cohomologie [LZ93], théorie de jauge [BV81], théorie des champs topologiques [Get94]) ;
- en géométrie différentielle (algébroïdes de Lie [KS95, Rog09]) ;
- en topologie algébrique (topologie des cordes [CS], homologie des espaces de lacets pointés doubles avec action du cercle [Get94]).

Les algèbres de Batalin-Vilkovisky se distinguent des algèbres de Gerstenhaber par l'existence d'un opérateur supplémentaire, générateur du crochet de Gerstenhaber et vérifiant certaines propriétés. Une algèbre de Gerstenhaber est à la fois une algèbre commutative graduée et une algèbre de Lie de degré 1 avec certaines compatibilités.

Nous nous intéressons ici aux algèbres de Batalin-Vilkovisky liées aux espaces de lacets pointés doubles.

Les espaces de lacets itérés, en particulier les espaces de lacets doubles, ont une structure qui leur est propre : ils sont caractérisés par une opérade. Précisément, un espace de lacets doubles est muni d'une action de l'opérade des petits disques $\mathcal{D}_2$. Et réciproquement, tout espace 1-connexe muni d'une action de cette opérade $\mathcal{D}_2$ est homotopiquement équivalent à un espace de lacets doubles. Une telle action de $\mathcal{D}_2$ induit une action de l'opérade d'homologie $H_*(\mathcal{D}_2)$ sur l'homologie d'un espace de lacets doubles. Cette action de $H_*(\mathcal{D}_2)$ fournit un produit, le produit de Pontryagin, et une autre opération, le crochet de Browder, lesquelles forment une structure d'algèbre de Gerstenhaber. De manière plus générale, l'opérade $\mathcal{D}_2$, qui caractérise les espaces de lacets doubles, est en homologie l'opérade des algèbres de Gerstenhaber [Coh76].

Une action du cercle S^1 sur l'espace de base d'un espace de lacets doubles conduit à une action de l'opérade des petits 2-disques *orientés* $f\mathcal{D}_2$. Cette opérade caractérise les espaces de lacets pointés doubles dans la catégorie des S^1-espaces, [SW03]. En ce sens, la contribution de cette opérade par rapport à $\mathcal{D}_2$ réside dans la prise en compte d'une action du cercle S^1 sur un espace topologique. E. Getzler [Get94] a montré que l'homologie $H_*(f\mathcal{D}_2)$ de l'opérade $f\mathcal{D}_2$ est l'opérade des algèbres de Batalin-Vilkovisky.

Présentation des résultats

L'objet fondamental sur lequel nous travaillons ici est la double construction cobar ; c'est un modèle algébrique pour les espaces de lacets pointés doubles. L'objectif principal est d'obtenir une structure de BV-algèbre homotopique explicite sur la double construction cobar de sorte à relever la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky naturellement présente sur l'homologie d'un espace de lacets pointés doubles.

Plus précisément, fixons Y un espace topologique pointé et notons $\Omega^2 Y := \mathrm{Hom}_*(S^2, Y)$ l'espace des lacets pointés doubles sur Y ; c'est à dire, l'espace des applications continues de la 2-sphère pointée S^2 vers Y préservant les points bases. Alors, l'homologie $H_*(\Omega^2 Y)$ munie du produit de Pontryagin $\cdot$ est une algèbre commutative graduée, et munie du crochet de Browder $[-;-]$ est une algèbre de Lie de degré 1. De plus, la compatibilité du crochet avec le produit de la façon suivante

$$[a; b \cdot c] = [a; b] \cdot c + (-1)^{(|a|+1)|b|} b \cdot [a; c] \quad \forall a, b, c \in H_*(\Omega^2 Y), \tag{0.1}$$

fait de $(H_*(\Omega^2), \cdot, [-;-])$ une algèbre de Gerstenhaber, [Coh76].
Supposons que Y est muni d'une action du cercle S^1 respectant le point base. On munit l'espace des lacets doubles $\mathrm{Hom}_*(S^2, Y)$ d'une action de S^1 comme suit :

$$\begin{aligned} S^1 \times \mathrm{Hom}_*(S^2, Y) &\to \mathrm{Hom}_*(S^2, Y) \\ (g, f) &\mapsto (g \cdot f)(s) = g f(g^{-1} \cdot s) \end{aligned}$$

où, l'action de S^1 sur la 2-sphère S^2 est donnée par la rotation d'axe nord-sud (le sud étant le point base). Cette action de S^1 induit sur l'homologie $H_*(\Omega^2 Y)$ un opérateur Δ. Celui-ci, est un générateur du crochet de Browder, à savoir que $(H_*(\Omega^2 Y), \cdot, \Delta)$ est une *algèbre de Batalin-Vilkovisky*, [Get94] :

- $\Delta \circ \Delta = 0$;
- le défaut de Δ à être une dérivation pour le produit de Pontryagin est l'opération de Browder $[-,-]$:

$$(-1)^{|a|}[a; b] = \Delta(ab) - \Delta(a)b - (-1)^{|a|} a\Delta(b), \;\; \forall\, a, b \in H_*(\Omega^2 Y). \tag{0.2}$$

Notre étude porte sur un modèle algébrique des espaces de lacets pointés doubles, la double construction cobar.

La construction cobar est un foncteur

$$\Omega : DGC \to DGA$$

de la catégorie des cogèbres différentielles graduées 1-connexes vers la catégorie des algèbres différentielles graduées connexes. Cette construction fournit un modèle pour les espaces de lacets. Plus précisément, soit Y un espace topologique 1-connexe. Notons $C_*(Y)$ le complexe de chaînes singulières de Y muni du coproduit d'Alexander-Whitney. Alors $\Omega C_*(Y)$ est quasi-isomorphe au complexe de chaînes cubiques de ΩY comme dg-algèbre. Ici, ΩY est l'espace des lacets pointés sur Y ; le produit de Pontryagin fait du complexe de chaînes cubiques $C_*^{\square}(\Omega Y)$ une dg-algèbre.
Pour être itérée, la construction cobar requiert l'existence d'un coproduit. La construction cobar d'une dg-cogèbre C peut être enrichie d'une structure de dg-algèbre de Hopf, par exemple

lorsque C est munie d'une structure de G-cogèbre homotopique, cf. [Kad04]. Dans ce cas, la double construction cobar résultante $\Omega^2 C = \Omega(\Omega C)$ possède une structure de G-algèbre homotopique, cf. [Kad05].

$$\begin{tikzcd}
\boxed{C} & \boxed{\Omega C} & \boxed{\Omega^2 C} & \boxed{H_*(\Omega^2 C)} \\
\boxed{\text{G-cogèbre homotopique}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{dg-algèbre de Hopf}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{G-algèbre homotopique}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{algèbre de Gerstenhaber}}
\end{tikzcd}$$

Une G-cogèbre homotopique C est essentiellement une dg-cogèbre munie d'une famille de co-opérations supérieures $(\nabla_1, \{E^{1,k}\}_{k\geq 2})$ satisfaisant certaines propriétés. En particulier :

- ∇_1 est une homotopie pour la cocommutativité du coproduit de C ;
- la coassociativité de ∇_1 est contrôlée par la co-opération $E^{1,2}$.

Dualement, une G-algèbre homotopique G est une dg-algèbre munie d'une famille d'opérations supérieures $(\cup_1, \{E_{1,k}\}_{k\geq 2})$ satisfaisant certaines propriétés. En particulier :

- $\cup_1$ est une homotopie pour la commutativité du produit de G ;
- l'associativité du $\cup_1$ est contrôlée par l'opération $E_{1,2}$.

L'homologie $H_*(G)$ d'une G-algèbre homotopique G est une algèbre de Gerstenhaber. Les algèbres de Gerstenhaber sont des algèbres de Lie de degré 1 munies d'un produit commutatif tels que le crochet de Lie satisfasse la relation de Poisson (0.1). Nous appelons crochet de Gerstenhaber un tel crochet. Le crochet de Gerstenhaber

$$[-;-] : H_*(G) \otimes H_*(G) \to H_*(G)$$

sur l'homologie d'une G-algèbre homotopique G, est donné par :

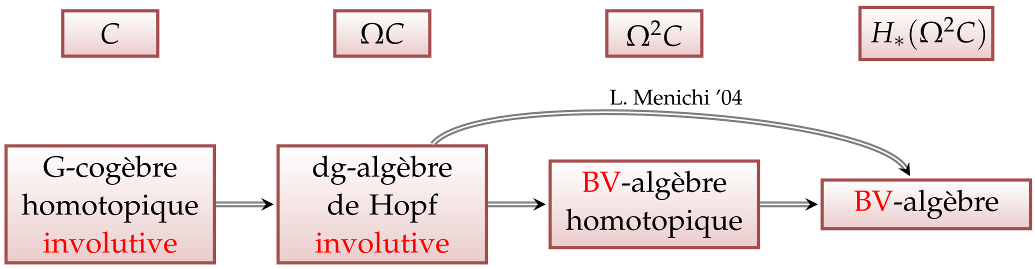
$$[a;b] := a \cup_1 b - (-1)^{(|a|+1)(|b|+1)} b \cup_1 a \ \text{ pour tous éléments homogènes } a, b \in G.$$

Dans un premier temps, on s'intéresse à la structure de dg-algèbre de Hopf de la construction cobar ΩC d'une G-cogèbre homotopique. On définit explicitement une famille de co-opérations $\{O_n\}_{n\geq 2}$ sur C (cf. (3.8)) construites à partir des co-opérations structurelles de la G-cogèbre homotopique C. On obtient un critère à l'obtention d'une antipode involutive sur ΩC.

Théorème A. *Soit $(C, \nabla_1, \{E^{1,k}\}_{k\geq 2})$ une G-cogèbre homotopique. L'involutivité de l'antipode sur ΩC est équivalente à l'annulation de la famille des co-opérations $\{O_n\}_{n\geq 2}$ sur C.*

Par suite, on définit la notion de *G-cogèbre homotopique involutive* comme les G-cogèbres homotopiques C telles que l'antipode résultante sur la construction cobar ΩC est involutive.

A. Connes et H. Moscovici [CM00] ont défini un opérateur de bord sur la construction cobar d'une dg-algèbre de Hopf involutive. En introduisant la notion de *BV-algèbre homotopique* (à la Gerstenhaber-Voronov) on démontre que la construction cobar $\Omega\mathcal{H}$ d'une dg-algèbre de Hopf involutive $\mathcal{H}$ est une BV-algèbre homotopique de BV-opérateur l'opérateur de Connes-Moscovici. Cette dernière structure relève la structure de BV-algèbre obtenue par L. Menichi [Men04] sur $H_*(\Omega\mathcal{H})$.



Nous appelons *structure de Connes-Moscovici* une structure de BV-algèbre homotopique sur la construction cobar dont le BV-opérateur est l'opérateur de Connes-Moscovici.

Le modèle algébrique pour les espaces de lacets pointés doubles que nous considérons par la suite est la double construction cobar.

Soit X un ensemble simplicial dont le 0-squelette est réduit à un point. Notons $C_*(X)$ le complexe de chaînes simpliciales sur X. Sa structure de dg-cogèbre est donnée par le coproduit d'Alexander-Whitney. Notons $|X|$ une réalisation géométrique de X.

H.-J. Baues [Bau81, Bau98] à construit un coproduit explicite

$$\nabla_0 : \Omega C_*(X) \to \Omega C_*(X) \otimes \Omega C_*(X)$$

quand le 1-squelette de $|X|$ est un point. Ce coproduit est tel que :

- $(\Omega C_*(X), \nabla_0)$ est une dg-algèbre de Hopf ;
- $H_*(\Omega^2 C_*(X)) \cong H_*(\Omega^2|X|)$ quand le 2-squelette de $|X|$ est un point.

Ce coproduit correspond à une structure de G-cogèbre homotopique sur $C_*(X)$. En étudiant minutieusement cette structure, on obtient le résultat suivant.

Théorème B. *Soit $\Sigma^2 X$ une double suspension simpliciale. Alors,*

- *le coproduit de Baues détermine une structure de G-cogèbre homotopique réduite (donc involutive) sur $C_*(\Sigma^2 X)$;*
- *la double construction cobar $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ munie d'une structure de Connes-Moscovici est quasi-isomorphe à $\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$, comme BV-algèbres homotopiques.*

Le second point du Théorème B est un élément clé dans la preuve des Théorèmes D et F. C'est un résultat de formalité qui s'énonce en toute généralité comme suit.

Théorème C. *Soit C une G-cogèbre homotopique réduite (alors involutive) avec un coproduit dont tous les éléments de C^+ sont primitifs. Alors, $\Omega^2 C$ et $\Omega^2 H_*(C)$, munies de la structure de Connes-Moscovici, sont quasi-isomorphes comme BV-algèbres homotopiques.*

On obtient,

Théorème D. *Soit $\mathbb{Q}$ le corps de coefficients. Alors, $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ possède une structure de Connes-Moscovici. La structure de BV-algèbre induite sur $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$ est libre sur l'homologie réduite de $H_*^+(X)$.*

En conséquence, les BV-algèbres $(H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)), \Delta_{CM})$ et $(H_*(\Omega^2 \Sigma^2 |X|), \Delta)$ sont isomorphes. Ici, Δ_{CM} est l'opérateur de Connes-Moscovici.
En caractéristique 2, l'homologie $H_*(\Omega^2 \Sigma^2 |X|)$ est une algèbre de Gerstenhaber *restreinte* sur l'homologie réduite $H_*^+(X)$. Dans un premier temps, on montre que la restriction est déjà présente dans la notion de G-algèbre homotopique.

Théorème E. *Soit $\mathbb{F}_2$ le corps de coefficients. Soit G une G-algèbre homotopique. Alors, l'algèbre de Gerstenhaber $H_*(G)$ est restreinte, de restriction induite par l'application $x \mapsto x \cup_1 x$.*

Rappelons que l'opération $\cup_1$ est l'opération structurelle de G utilisée pour définir le crochet de Gerstenhaber sur $H_*(G)$:

$$[a;b] = a \cup_1 b + b \cup_1 a, \quad \forall a, b \in G.$$

On obtient,

Théorème F. *Soit $\mathbb{F}_2$ le corps de coefficients. Alors, $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ est munie d'une structure de Connes-Moscovici. La structure induite d'algèbre de Gerstenhaber restreinte sur $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$ est libre sur l'homologie réduite $H_*^+(X)$.*

En conséquences, les algèbres de Gerstenhaber restreintes $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$ et $H_*(\Omega^2|\Sigma^2 X|)$ sont isomorphes.

Lorsque l'anneau de coefficient est $\mathbb{Q}$, on déforme la structure de dg-algèbre de Hopf présente sur construction cobar de Baues en une structure de dg-algèbre de Hopf involutive :

Théorème G. *Soit $\mathbb{Q}$ l'anneau de base. Soit X un ensemble simplicial 1-réduit. Alors, la construction cobar de Baues $(\Omega C_*(X), \nabla_0, S)$ est quasi-isomorphe, comme dg-algèbre de Hopf à homotopie près, à une dg-algèbre de Hopf involutive $(\Omega C_*(X), \nabla', S')$.*

Ainsi, on obtient

Corollaire. *La double construction cobar $\Omega(\Omega C_*(X), \nabla', S')$ est munie d'une structure de Connes-Moscovici.*

Dans une première partie, on établit des résultats structuraux sur la construction cobar, visant à obtenir un relèvement homotopique explicite d'une structure de BV-algèbre sur la double construction cobar. Ces résultats interviennent à différentes itérations de la construction cobar. En conclusion de cette première partie, nous obtenons par descente de structures, un critère à l'obtention d'une structure de BV-algèbre homotopique (à la Gerstenhaber-Voronov) sur la double construction cobar d'une G-cogèbre homotopique C, ceci en terme de co-opérations structurelles de C.

Dans une seconde partie, nous appliquons le critère obtenu en première partie sur la G-cogèbre homotopique $C_*(X)$, où X est un ensemble simplicial et $C_*(X)$ est le complexe de chaînes simpliciales sur X muni du coproduit d'Alexander-Whitney. Nous précisons dans cette partie la structure de G-cogèbre homotopique sur $C_*(X)$ considérée telle que $\Omega^2 C_*(X)$ soit un modèle pour les lacets doubles $\Omega^2|X|$. Nous donnons ensuite des résultats de comparaisons entre la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky obtenue lorsque X est une double suspension et celle sur $H_*(\Omega^2|X|)$ induite par l'action diagonale du cercle sur $\Omega^2|X|$. Nous terminons cette partie en montrant que, si l'anneau des coefficients est $\mathbb{Q}$, alors la structure de dg-algèbre de Hopf $(\Omega C_*(X), \nabla_0, S)$ se déforme en une structure de dg-algèbre de Hopf *involutive* $(\Omega C_*(X), \nabla', S')$; la double construction cobar $\Omega(\Omega C_*(X), \nabla', S')$ est alors munie d'une structure de BV-algèbre homotopique.

I

Résultats algébriques

1

Objets de base

1.1 Gèbres différentielles graduées

On fixe k comme le corps commutatif de coefficients. Une grande partie des résultats reste néanmoins vraie lorsque k est un anneau commutatif.

1.1.1 Catégories monoïdale et monoïdes

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale stricte de produit $\otimes$ et d'unité k. Un monoïde (unitaire) dans $\mathcal{C}$ est un triplet (A, μ, η) où A est un objet de $\mathcal{C}$, $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A; A)$ et $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(k; A)$ sont tels que les diagrammes suivants (1.1), (1.2) soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1 \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes 1"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes k \arrow[r, "1 \otimes \eta"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & k \otimes A \arrow[l, "\eta \otimes 1"'] \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Un monoïde augmenté est un monoïde (A, μ, η) muni d'une augmentation : $\epsilon \in \mathrm{Hom}(A; k)$ vérifiant $\epsilon \circ \mu = \mu(\epsilon \otimes \epsilon)$.

Un comonoïde (coaugmenté) dans $\mathcal{C}$ est un monoïde (augmenté) dans la catégorie duale $\mathcal{C}^{op}$.

1.1.2 Catégorie des espaces vectoriels gradués et dg-espaces vectoriels

Catégorie des espaces vectoriels gradués

Un k-espace vectoriel gradué M est une suite de k-espaces vectoriels M_n indexée par les entiers $\mathbb{Z}$. Un élément $m \in M_n$ dans la n-ième composante de M, M_n, est dit homogène de degré $|m| = n$. On note

$$\mathrm{Hom}(M; N)$$

le k-espace vectoriel gradué des morphismes k-linéaires. Sa r-ième composante est

$$\mathrm{Hom}(M; N)_r = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M_p; N_{p+r}).$$

Le produit tensoriel sur k de deux k-espaces vectoriels M et N est

$$M \otimes_k N$$

de composantes

$$(M \otimes_k N)_n = \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes_k N_q.$$

Soient deux applications d'espaces vectoriels gradués, $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$, l'application

$$f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$$

suit la règle de signes de Koszul :

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = (-1)^{|m||g|} f(m) \otimes g(n).$$

Ceci définit la catégorie monoïdale des espaces vectoriels gradués.

Catégorie des dg-espaces vectoriels

Un dg-espace vectoriel (M, d_M) est un k-espace vectoriel gradué M muni d'un morphisme k-linéaire $d_M : M \to M$ de degré -1 et de carré nul $d_M d_M = 0$. On note

$$(\mathrm{Hom}(M; N), \partial)$$

le dg-espace vectoriel des morphismes k-linéaires $\mathrm{Hom}(M; N)$ de différentielle

$$\partial(f) = d_N f - (-1)^{|f|} f d_M.$$

Les cycles de ce dg-espaces vectoriels, c'est à dire les applications f telles que $d_N f = (-1)^{|f|} f d_M$, forment le espace vectoriel gradué des morphismes de dg-espaces vectoriels, noté

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{dg}}(M; N).$$

Le produit tensoriel sur k de deux dg-espaces vectoriels (M, d_M) et (N, d_N) est le dg-espace vectoriel

$$(M \otimes_k N, d_{M \otimes_k N})$$

de différentielle

$$d_{M \otimes_k N}(m \otimes n) = d_M(m) \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes d_N(n).$$

Ceci définit la catégorie monoïdale des dg-espaces vectoriels.

Remarque 1.1.1. Par la suite, on notera $M \otimes_k N$ simplement par $M \otimes N$.

Étant donné un dg-espace vectoriel (M, d) son homologie $H(M, d)$ est un espace vectoriel gradué définie en chaque degré $*$ comme

$$H_*(M, d) := \mathrm{Ker}(d : M_* \to M_{*-1}) / \mathrm{Im}(d : M_{*+1} \to M_*).$$

Une application $f : M \to N$ entre deux dg-espaces vectoriels induit une application d'espaces vectoriels en homologie

$$H(f) : H(M, d) \to H(N, d).$$

L'application f est appelée quasi-isomorphisme si elle induit un isomorphisme en homologie. Deux applications de dg-espaces vectoriels $f, g : M \to N$ sont homotopes si il existe une application d'espaces vectoriels gradués

$$h : M \to N$$

telle que

$$\partial(h) = f - g.$$

L'application h est appelée l'homotopie entre f et g.

1.1.3 Algèbres

Définition 1.1.2. Une algèbre (resp. dg-algèbre) est un monoïde dans la catégorie des espaces vectoriels (resp. des dg-espaces vectoriels). Une (dg-)algèbre augmentée est un monoïde (unitaire) augmenté dans la catégorie des (dg-)espaces vectoriels.

On note

$$\mu^{(n)} : A^{\otimes n} \to A$$

pour $n \geq 2$, le produit n-itéré : $\mu^{(n)} = \mu^{(n-1)}(\mu \otimes 1)$ avec $\mu^{(2)} = \mu$. Pour une dg-algèbre augmentée, on note $A^+ = \mathrm{Ker}(\epsilon)$ la dg-algèbre réduite. Une telle dg-algèbre A^+ n'est plus unitaire.

La catégorie des (dg-)algèbre est une catégorie monoïdale pour le produit tensoriel. Pour deux dg-algèbres augmentées A_1 et A_2, leur produit $A_1 \otimes A_2$ est la dg-algèbre de produit

$$\mu_{A_1 \otimes A_2} := (\mu_{A_1} \otimes \mu_{A_2})(1 \otimes \tau \otimes 1),$$

d'unité

$$\eta_{A_1 \otimes A_2} := \eta_{A_1} \otimes \eta_{A_2},$$

et d'augmentation

$$\epsilon_{A_1 \otimes A_2} := \epsilon_{A_1} \otimes \epsilon_{A_2}.$$

L'application $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ est

$$\tau(a \otimes b) := (-1)^{|a||b|} b \otimes a.$$

Définition 1.1.3. Un morphisme de dg-algèbres, disons A_1 et A_2, est un morphisme de dg-espaces vectoriels $f : A_1 \to A_2$ tel que :

$$\mu_{A_2}(f \otimes f) = f \mu_{A_1}.$$

Si de plus A_1 et A_2 sont augmentées f est un morphismes d'algèbres augmentées s'il respecte également les augmentations :

$$\epsilon_{A_2} f = \epsilon_{A_1}.$$

Un tel morphisme induit un morphisme de dg-algèbres réduites $f : A_1^+ \to A_2^+$.

Définition 1.1.4. Soient $f, g : A \to B$ deux morphismes d'algèbres. Une (f, g)-dérivation est une application $h : A \to B$ vérifiant

$$h \circ \mu = \mu(f \otimes h + h \otimes g).$$

L'ensemble des $(1, 1)$-dérivations $f : A \to A$ est noté $\mathrm{Der}(A)$.

Définition 1.1.5. Une algèbre A est dite connexe si elle est augmentée ($A_0 \cong k$) et si elle vérifie $A_n = 0$ pour $n \leq -1$. Une algèbre A est dite n-connexe si elle est connexe et $A_r = 0$ pour $1 \leq r \leq n$.

Algèbre libre

Soit V un k-espace vectoriel gradué. L'algèbre (unitaire) tensorielle sur V est

$$TV = k \oplus \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$$

de produit

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) \cdot (v_{r+1} \otimes \cdots \otimes v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n),$$

et d'unité $1 \in k$. Elle est augmentée, d'augmentation $\epsilon(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = 0$ pour $n \geq 1$ et $\epsilon(1) = 1$. Une algèbre A est libre si elle est isomorphe à TV pour un k-espace vectoriel V.

Proposition 1.1.6. *Soit $j : V \hookrightarrow TV$ l'inclusion canonique.*

1. *Pour toute algèbre (unitaire) A, il y a une bijection* $\mathrm{Hom}(V; A) \cong \mathrm{Hom}_{\text{algèbres}}(TV; A)$.

2. *Soient $f, g : TV \to B$ deux morphismes d'algèbres. Il y a une bijection entre les (f, g)-dérivations $TV \to B$ et* $\mathrm{Hom}(V; B)$.
   En particulier, il a une bijection

$$\mathrm{Der}(TV) \cong \mathrm{Hom}(V; TV).$$

Démonstration. 1. La bijection de $\mathrm{Hom}_{\text{algèbres}}(TV; A)$ dans $\mathrm{Hom}(V; A)$ est la restriction à V, i.e $f \mapsto f \circ j$. La bijection réciproque envoie $g : V \to A$ sur $G \in \mathrm{Hom}_{\text{algèbres}}(TV; A)$ de n-ième composante la composée $\mu^{(n)} \circ g^{\otimes n}$, pour $n \geq 1$ et de 0-ième composante l'identité $1 \to 1$.

2. La bijection des (f, g)-dérivations $TV \to B$ sur $\mathrm{Hom}(V; B)$ est donnée par $D \mapsto D \circ j$. La bijection réciproque entre $\mathrm{Hom}(V; B)$ et les (f, g)-dérivations $TV \to B$ est donnée par $h \mapsto D(h)$ de n-ième composante

$$\mu^{(n)} \left(\sum_{i+1+j=n} (f^{\otimes i} \otimes h \otimes g^{\otimes j}) \right),$$

pour $n \geq 1$, et de 0-ième composante nulle.

□

Ainsi, pour un dg-espace vectoriel (V, d_V) il existe une unique dérivation $d_{TV} : TV \to TV$ induite par d_V. De plus, le fait que $d_V^2 = 0$ implique que $d_{TV}^2 = 0$. Munie de cette différentielle, (TV, d_{TV}) est une dg-algèbre, libre comme algèbre.

Corollaire 1.1.7. *Soient (V, d_V) un dg-espace vectoriel et (B, d_B) une dg-algèbre. Soient $f, g : V \to B$ et $h : V \to B$ tels que $f - g = d_B h + h d_V$. Alors la (F, G)-dérivation $D(h)$ vérifie $F - G = d_B D(h) + D(h) d_{TV}$. Réciproquement, soient $F, G \in \mathrm{Hom}(TV; B)$ deux morphismes de dg-algèbres et $H : TV \to B$ une homotopie telle que $F - G = d_B H + H d_{TV}$ qui est une (F, G)-dérivation. Alors, $f - g = d_B h + h d_V$, où $f = F \circ j$, $g = G \circ j$ et $h = H \circ j$.*

1.1.4 Cogèbres

Définition 1.1.8. Une cogèbre (resp. dg-cogèbre) (C, ∇, ϵ) est un comonoïde dans la catégorie des espaces vectoriels (resp. dg-espaces vectoriels). L'application $\nabla : C \to C \otimes C$ est appelée le coproduit de C et $\epsilon : C \to k$ sa counité. Une (dg-)cogèbre coaugmentée $(C, \nabla, \epsilon, \eta)$ est un comonoïde (counitaire) coaugmenté dans la catégorie des (dg-)espaces vectoriels. Une (dg-)cogèbre est cocommutative si le coproduit vérifie $\nabla = \tau \nabla$.

On utilise également la notation de Sweedler :

$$\nabla(c) = \sum_{(c)} c^1 \otimes c^2 \tag{1.3}$$

pour $c \in C$. On oubliera parfois la somme lorsque le contexte sera clair. On note

$$\nabla^{(n)} : C \to C^{\otimes n+1}$$

pour $n \geq 1$, le coproduit n-itéré : $\nabla^{(n)} = (\nabla \otimes 1)\nabla^{(n-1)}$ avec $\nabla^{(1)} = \nabla$. On utilise la notation de Sweedler :

$$\nabla^{(n)}(c) = c^1 \otimes c^2 \otimes \cdots \otimes c^{n+1},$$

pour $c \in C$.
Pour une dg-cogèbre coaugmentée, c'est à dire munie d'une coaugmentation $\eta : k \to C$ telle que $\epsilon\eta = 1_k$, alors C est isomorphe à $\mathrm{Im}(\eta) \oplus \mathrm{Ker}(\epsilon)$. On note $C^+ = \mathrm{Ker}(\epsilon)$ la dg-cogèbre réduite dont le coproduit est

$$\overline{\nabla}(c) = \nabla(c) - c \otimes 1 - 1 \otimes c.$$

Le produit tensoriel de deux dg-cogèbres (coaugmentées) est une dg-cogèbre (coaugmentée) de coproduit

$$\nabla_{C_1 \otimes C_2} := (1 \otimes \tau \otimes 1)(\nabla_{C_1} \otimes \nabla_{C_2});$$

de counité et de coaugmentations

$$\epsilon_{C_1 \otimes C_2} := \epsilon_{C_1} \otimes \epsilon_{C_2} ;$$
$$\eta_{C_1 \otimes C_2} := \eta_{C_1} \otimes \eta_{C_2}.$$

Définition 1.1.9. Un morphisme de dg-cogèbres, disons C_1 et C_2, est un morphisme de dg-espaces vectoriels $f : C_1 \to C_2$ tel que :

$$(f \otimes f)\nabla_{C_1} = \nabla_{C_2} f.$$

Si de plus C_1 et C_2 sont coaugmentées f est un morphismes d'algèbres augmentées s'il respecte également les coaugmentations :

$$f\eta_{A_1} = \eta_{A_2}.$$

Un tel morphisme induit un morphisme de dg-cogèbres réduites $f : C_1^+ \to C_2^+$.

Définition 1.1.10. Une cogèbre C est dite connexe si elle est coaugmentée ($C_0 \cong k$) et si elle vérifie $C_n = 0$ pour $n \leq -1$. Une cogèbre C est dite n-connexe ($n \geq 1$) si elle est connexe et $C_r = 0$ for $1 \leq r \leq n$.

Définition 1.1.11. Soient $f, g : C \to D$ deux morphismes de cogèbres. Une (f, g)-codérivation est une application $h : C \to D$ vérifiant

$$\nabla \circ h = (f \otimes h + h \otimes g)\nabla.$$

L'ensemble des $(1, 1)$-codérivations $f : C \to C$ est noté $\mathrm{Coder}(C)$.

Soit $(C, d, \nabla, \epsilon, \eta)$ une dg-cogèbre coaugmentée. On définit une filtration sur C :

$$\begin{aligned} &F_0C = \mathrm{Im}(\eta)\ ; \\ &F_rC = \mathrm{Im}(\eta) \oplus \{x \in C^+ \mid \overline{\nabla}^{(n)} = 0 \text{ pour } n \geq r\}, \text{ pour } r \geq 1. \end{aligned}$$

Si la filtration est exhaustive, i.e $\bigcup_r F_rC = C$, la dg-cogèbre C est dite conilpotente.

Cogèbre colibre

Soit V un k-espace vectoriel gradué. La cogèbre tensorielle (counitaire) sur V est la cogèbre

$$T^c(V) = k \oplus \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$$

de coproduit

$$\begin{aligned} \nabla_{T^cV}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \\ + 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n), \end{aligned}$$

et de counité, l'augmentation $\epsilon(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = 0$ pour $n \geq 1$ et $\epsilon(1) = 1$. Elle est coaugmentée, de coaugmentation $\eta(1) = 1 \in k \subset T^c(V)$. Une dg-cogèbre C est colibre si elle est isomorphe à $T^c(V)$ pour un espace vectoriel gradué V. La cogèbre tensorielle $T^c(V)$ est conilpotente.

Proposition 1.1.12. *Soit $p : T^c(V) \twoheadrightarrow V$ la projection canonique.*

1. *Pour toute cogèbre conilpotente (counitaire) C, il y a une bijection*

$$\mathrm{Hom}(C; V) \cong \mathrm{Hom}_{\text{cogèbres}}(C; T^c(V)).$$

2. *Soient $f, g : C \to T^c(V)$ deux morphismes de cogèbres. Il y a une bijection entre les (f, g)-codérivations $C \to T^c(V)$ et $\mathrm{Hom}(C; V)$.*
   En particulier, il y a une bijection

$$\mathrm{Coder}(T^c(V)) \cong \mathrm{Hom}(T^c(V); V).$$

Démonstration. 1. La bijection de $\mathrm{Hom}_{\text{cogèbres}}(C; T^c(V))$ dans $\mathrm{Hom}(C; V)$ est la projection sur V, i.e $f \mapsto p \circ f$. La bijection réciproque envoie $g : C \to V$ sur $G \in \mathrm{Hom}_{\text{cogèbres}}(C; T^c(V))$ de n-ième composante la composée $g^{\otimes n} \circ \nabla^{(n-1)}$, pour $n \geq 1$ et de 0-ième composante l'identité $1 \to 1$.

2. La bijection des (f, g)-codérivations $C \to T^c(V)$ sur $\mathrm{Hom}(C; V)$ est donnée par $D \mapsto p \circ D$. La bijection réciproque entre $\mathrm{Hom}(C; V)$ et les (f, g)-codérivations $C \to T^c(V)$ est donnée par $h \mapsto coD(h)$ de n-ième composante

$$\left(\sum_{i+1+j=n} (f^{\otimes i} \otimes h \otimes g^{\otimes j}) \right) \circ \nabla^{(n-1)},$$

pour $n \geq 1$, et de 0-ième composante nulle.

□

Ainsi, pour un dg-espace vectoriel (V, d_V) il existe une unique codérivation $d_{TV} : T^c(V) \to T^c(V)$ induite par d_V. De plus, le fait que $d_V^2 = 0$ implique que $d_{TV}^2 = 0$. Munie de cette différentielle, $(T^c(V), d_{TV})$ est une dg-cogèbre, libre comme cogèbre.

1.1.5 Bigèbres

Définition 1.1.13. Une dg-bigèbre B est une cogèbre (B, ∇, ϵ) dans la catégorie des dg-algèbres. Ainsi, en notant $(B, d, \cdot)$ la dg-algèbre sous-jacente et (B, ∇, ϵ) la cogèbre sous-jacente, la compatibilité de ces deux structures est donnée par :

$$\nabla(a \cdot b) = \sum_{(a \cdot b)} (a \cdot b)^1 \otimes (a \cdot b)^2 \tag{1.4}$$

$$= \nabla(a) \cdot' \nabla(b) = \sum_{(a),(b)} (-1)^{|a^2||b^1|} a^1 \cdot b^1 \otimes a^2 \cdot b^2, \tag{1.5}$$

$$(d \otimes 1 + 1 \otimes d)\nabla = \nabla d, \tag{1.6}$$

$$\epsilon(a \cdot b) = \epsilon(a)\epsilon(b).$$

Une dg-bigèbre est augmentée (resp. coaugmentée) si elle est augmentée comme dg-algèbre (unitaire) (resp. si elle est coaugmentée comme dg-cogèbre (counitaire)). L'augmentation et la counité coïncident ; de même pour la coaugmentation et l'unité. Ici, B^+ désigne $B^+ = \mathrm{Ker}(\epsilon)$.

Remarque 1.1.14. La dg-algèbre et dg-cogèbre B^+ n'est en général pas une dg-bigèbre ; le coproduit réduit n'est pas nécessairement un morphisme d'algèbres.

Proposition 1.1.15. *Soit $\nabla : V \to TV \otimes TV$ une application de dg-espaces vectoriels. On note $\nabla' : TV \to TV \otimes TV$ le morphisme de dg-algèbres induit par ∇.*

1. *Si ∇ est coassociative sur V, alors ∇' est coassociative sur TV.*

2. *Si ∇ est cocommutative, alors ∇' aussi.*

3. *Si $(\epsilon \otimes 1)\nabla(v) = (1 \otimes \epsilon)\nabla(v) = v$ pour tout $v \in V$, alors ϵ est une counité pour ∇'.*

Et réciproquement pour chacun des trois points. En particulier, si les points 1 et 3 sont satisfaits, (TV, ∇') *est une dg-bigèbre counitaire.*

Démonstration. On procède par récurrence sur la longueur $n \geq 1$ des tenseurs $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in TV$. Les hypothèses fournissent l'étape initiale $n = 1$. On suppose de manière respective vraie chaque assertion pour $n \geq 1$. Il suffit alors de montrer chaque assertion sur un produit $vw = v \otimes w$ supposant vraie l'assertion pour v et w.

1. C'est une conséquence directe du fait que ∇' étant un morphisme d'algèbre, $\nabla'(\nabla' \otimes 1)$ et $\nabla'(1 \otimes \nabla')$ le sont également. En effet, avec la notation de Sweedler,

$$\begin{aligned}(\nabla' \otimes 1)\nabla'(v \otimes w) &= (v^1 w^1)^1 \otimes (v^1 w^1)^2 \otimes v^2 w^2 \\ &= (v^1)^1 (w^1)^1 \otimes (v^1)^2 (w^1)^2 \otimes v^2 w^2 \\ &= [(v^1)^1 \otimes (v^1)^2 \otimes v^2] \cdot_{TV^{\otimes 3}} [(w^1)^1 \otimes (w^1)^2 \otimes w^2] \\ &= [(\nabla' \otimes 1)\nabla'(v)] \cdot_{TV^{\otimes 3}} [(\nabla' \otimes 1)\nabla'(w)].\end{aligned}$$

2. Ceci est clair si l'on montre que $\tau\nabla'$ est un morphisme d'algèbre. Avec la notation de Sweedler, on a :

$$\begin{aligned}\tau\nabla'(v \otimes w) &= \tau((vw)^1 \otimes (vw)^2) = \tau(v^1 w^1 \otimes v^2 w^2) \\ &= (v^2 w^2 \otimes v^1 w^1) = (v^2 \otimes v^1) \cdot_{TV^{\otimes 2}} (w^2 \otimes w^1) \\ &= [\tau\nabla'(v)] \cdot_{TV^{\otimes 2}} [\tau\nabla'(w)].\end{aligned}$$

3. L'augmentation est un morphisme d'algèbre. Ainsi,

$$(\epsilon \otimes 1)\nabla'(v \otimes w) = [(\epsilon \otimes 1)\nabla'(v)] \cdot_{TV^{\otimes 2}} [(\epsilon \otimes 1)\nabla'(w)] = vw.$$

□

Définition 1.1.16. Un morphisme de dg-bigèbres est un morphisme de cogèbres dans la catégorie des dg-algèbres.

Remarque 1.1.17. Un morphisme de dg-bigèbres unitaires et counitaires est un morphisme de dg-bigèbres augmentées et coaugmentées.

Définition 1.1.18. Soient (A, d_A, μ, η) et $(C, d_C, \nabla, \epsilon)$ une dg-algèbre et une dg-cogèbre respectivement. On munit le dg-espace vectoriel

$$(\mathrm{Hom}(C; A), \partial)$$

du produit de convolution

$$\begin{aligned}\smile : \mathrm{Hom}(C; A) \otimes \mathrm{Hom}(C; A) &\to \mathrm{Hom}(C; A) \\ f \otimes g &\to f \smile g := \mu(f \otimes g)\nabla.\end{aligned}$$

L'associativité de μ et la coassociativité de ∇ implique celle de $\smile$. La composée $\eta\epsilon$ en est l'unité. La différentielle commute avec $\smile$. On appelle l'algèbre de convolution de A et C cette dg-algèbre $(\mathrm{Hom}(C; A), \partial, \smile, \eta\epsilon)$.

1.1.6 Algèbres de Hopf

Définition 1.1.19. Soit $(\mathcal{H}, d, \mu, \eta, \nabla, \epsilon)$ une dg-bigèbre. Une antipode $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un morphisme de dg-espaces vectoriels qui est l'inverse de l'identité dans l'algèbre de convolution $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Explicitement, S satisfait

$$S(a^1)a^2 = \eta\epsilon(a) = a^1 S(a^2)$$

pour tout $a \in \mathcal{H}$.

On en déduit immédiatement :

Proposition 1.1.20. *Une antipode, lorsqu'elle existe, est unique.*

Définition 1.1.21. Une dg-algèbre de Hopf $(\mathcal{H}, d, \mu, \eta, \nabla, \epsilon, S)$ est une dg-bigèbre $\mathcal{H}$ munie d'une antipode S. Si, de plus, l'antipode est involutive ($S^2 = id$), la dg-algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ est dite involutive.

Une antipode satisfait les propriétés suivantes.

Proposition 1.1.22. *[Swe69, Proposition 4.0.1]*

i. $S(a^2) \otimes S(a^1) = (-1)^{|a^1||a^2|} S(a)^1 \otimes S(a)^2$ *(anti-morphisme de cogèbre) ;*

ii. $S(\eta(1)) = \eta(1)$ *(morphisme unitiare) ;*

iii. $S(ab) = (-1)^{|a||b|} S(b)S(a)$ *(anti-morphisme d'algèbre) ;*

iv. $\epsilon(S(a)) = \epsilon(a)$ *(morphisme counitaire).*

v. Les équations suivantes sont équivalentes :

  (a) $S^2 = S \circ S = id$ *;*
  (b) $S(a^2)a^1 = \eta\epsilon(a)$ *;*
  (c) $a^2 S(a^1) = \eta\epsilon(a)$.

vi. Si $\mathcal{H}$ *est commutative ou cocommutative, alors* $S^2 = id$.

Proposition 1.1.23. *Soit B une dg-bigèbre connexe (i.e $B_n = 0$ pour $n \leq -1$ et $B_0 = k$). Alors B est une dg-algèbre de Hopf.*

Démonstration. L'équation $\mu(1 \otimes S)\nabla(b) = \eta\epsilon(b)$ pour tout $b \in B$ se lit comme $\mu(1 \otimes S)\nabla(b) = \mu(1 \otimes S)\overline{\nabla}(b) + \mu(1 \otimes S)(b \otimes 1 + 1 \otimes b) = \mu(1 \otimes S)\overline{\nabla}(b) + b + S(b) = \eta\epsilon(b)$. C'est à dire :

$$S(b) = \eta\epsilon(b) - b - \mu(1 \otimes S)\overline{\nabla}(b).$$

Or, $\overline{\nabla}(b) \in \oplus_{i+j=|b|, i,j>0} B_i \otimes B_j$ pour tout élément homogène $b \in B$. On définit alors S par récurrence sur le degré de b. On vérifie facilement que S est une application de dg-espaces vectoriels. □

On conclut cette partie en décrivant les morphismes de dg-algèbres de Hopf.

Définition 1.1.24. Soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux dg-algèbres de Hopf d'antipodes S_1 et S_2 respectivement. Un morphisme $f : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ de dg-algèbres de Hopf, est un morphisme de dg-bigèbres qui satisfait

$$S_2 f = f S_1.$$

Proposition 1.1.25. *Un morphisme de dg-bigèbres entre deux dg-algèbres de Hopf est un morphisme de dg-algèbres de Hopf.*

Autrement dit, la catégorie des dg-algèbres de Hopf est une sous-catégorie pleine de la catégorie des dg-bigèbres.

Exemple 1.1.26. [Kas95, Theorem III.2.4] Soit V un espace vectoriel gradué. On considère sur l'algèbre tensorielle libre TV, le coproduit

$$\nabla_{sh} : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$$

qui est primitif sur $V \subset T(V)$ et que l'on étend comme morphisme d'algèbre ; ainsi $(T(V), \cdot, \nabla_{sh})$ est une bigèbre graduée. Explicitement, pour $v \in V$, on a :

$$\nabla_{sh}(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v.$$

On note $\cdot'$ le produit de $T(V) \otimes T(V)$. Comme morphisme d'algèbre, on obtient que $\nabla_{sh}(v \otimes w) = \nabla_{sh}(v) \cdot' \nabla_{sh}(w)$ ce qui donne :

$$\nabla_{sh}(v \otimes w) = (v \otimes 1 + 1 \otimes v) \cdot' (w \otimes 1 + 1 \otimes w) = vw \otimes 1 + v \otimes w + (-1)^{|v||w|} w \otimes v + 1 \otimes vw,$$

où l'on note simplement vw pour $v \cdot w$. Par récurrence, on obtient

$$\nabla_{sh}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1 \cdots v_n \otimes 1 + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(r,n)} \mathrm{Sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(r)} \otimes v_{\sigma(r+1)} \cdots v_{\sigma(n)} + 1 \otimes v_1 \cdots v_n, \quad (1.7)$$

pour $v_i \in V$. Ici, $\mathrm{Sh}(k,n)$ désigne l'ensemble des (k,n)-*shuffles*, c'est à dire, l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathbb{S}_n$ vérifiant

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(r) \quad \text{et} \quad \sigma(r+1) < \sigma(r+2) < \cdots < \sigma(n).$$

Le signe, $\mathrm{Sign}(\sigma) = \mathrm{Sign}(\sigma; v_1, ..., v_n)$, est le signe associée à la permutation σ sur les éléments $v_1, ..., v_n$, sans prendre en compte la signature de la permutation. Par exemple, si σ est la transposition de 1 avec 2, $\mathrm{Sign}(\sigma; v_1, v_2) = (-1)^{|v_1||v_2|}$. En vertu de la Proposition 1.1.15, on a :

Proposition 1.1.27. *Le coproduit ∇_{sh} est coassociatif et cocommutatif.*

Par la Proposition 1.1.23 il existe une antipode $S : TV \to TV$. Celle-ci est donnée par

$$\begin{aligned} S : TV &\to TV \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n &\mapsto (-1)^n v_n \otimes \cdots \otimes v_2 \otimes v_1. \end{aligned}$$

Ceci résulte du fait que V est primitif pour le coproduit. L'antipode restreinte à V est en conséquence $-Id$. Étendue comme anti-morphisme d'algèbre sur TV, on obtient le résultat.

1.2 Constructions bar-cobar

On rappelle les constructions bar-cobar.
Commençons par définir les morphismes tordants entre une dg-algèbre A et une dg-cogèbre C.

Définition 1.2.1. L'ensemble des morphismes tordants $\mathrm{Tw}(C; A)$ est le sous-ensemble de l'algèbre de convolution $(\mathrm{Hom}(C; A), \partial, \smile, \eta\epsilon)$ constitué des morphismes de degré -1, $f \in$

$\mathrm{Hom}(C; A)_{-1}$ solutions de l'équation :

$$\partial(f) + f \smile f = 0, \tag{1.8}$$

et qui sont nuls quand composés avec l'augmentation et nuls quand composés avec la coaugmentation.

Construction bar

Soit (A, d, μ, η) une dg-algèbre augmentée. La construction bar est un foncteur de la catégorie des dg-algèbres augmentées vers la catégorie des dg-cogèbres conilpotentes.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : DGA_0 - \text{augmentées} &\to DGC_0 - \text{conilpotentes} \\ A &\mapsto \mathcal{B}\, A. \end{aligned}$$

La cogèbre sous-jacente de $\mathcal{B}\, A$ est la cogèbre tensorielle colibre :

$$T^c(\mathrm{s}\, A^+) = k \oplus \bigoplus_{n \geq 1} (\mathrm{s}\, A^+)^{\otimes n}$$

de coproduit

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{B}\, A}(\mathrm{s}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, a_n) = (\mathrm{s}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, a_n) \otimes 1 \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (\mathrm{s}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, a_i) \otimes (\mathrm{s}\, a_{i+1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, a_n) + 1 \otimes (\mathrm{s}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, a_n). \end{aligned}$$

La codifférentielle $d_{\mathcal{B}\, A} : \mathcal{B}\, A \to \mathcal{B}\, A$ est l'unique codérivation de composante

$$T^c(\mathrm{s}\, A^+) \twoheadrightarrow \mathrm{s}\, A^+ \oplus (\mathrm{s}\, A^+)^{\otimes 2} \xrightarrow{-\mathrm{s}\, d_{A^+}\, \mathrm{s}^{-1} + \mathrm{s}\, \mu_{A^+}(\mathrm{s}^{-1} \otimes \mathrm{s}^{-1})} \mathrm{s}\, A^+.$$

Cette codérivation s'écrit alors comme la somme de deux codérivations $d_1 + d_2$ où d_1 est la codérivation induite par d_{A^+} et d_2 celle induite par μ_{A^+}. L'associativité de μ_{A^+} implique $d_2^2 = 0$, le fait $d_{A^+}^2 = 0$ implique $d_1^2 = 0$ et le fait que d_{A^+} est une dérivation pour μ_{A^+} implique que $d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$. Ainsi, $d_{\mathcal{B}\, A}^2 = 0$. Explicitement,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{B}\, A}(\mathrm{s}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\eta_0}\, \mathrm{s}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, d_{A^+}(a_i) \otimes \cdots \mathrm{s}\, a_n \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\eta_1}\, \mathrm{s}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, \mu_{A^+}(a_i \otimes a_{i+1}) \otimes \cdots \mathrm{s}\, a_n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \sum_{s=1}^{i-1} |a_s| + i \\ \eta_1 &= \sum_{s=1}^{i} |a_s| + i. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Construction cobar

La construction cobar est la construction duale de la construction bar. Elle fut introduite par J. Adams [Ada56] comme modèle pour les chaînes cubiques d'espaces de lacets pointés. C'est un foncteur de la catégorie des dg-cogèbres coaugmentées vers la catégorie des dg-algèbres augmentées.

Soit $(C, d_C, \nabla_C, \epsilon)$ une dg-cogèbre coaugmentée ; on a ainsi, $C = C^+ \oplus k$. La construction cobar est un foncteur

$$\begin{aligned} \Omega : DGC_0 - \text{coaugmentées} &\to DGA_0 - \text{augmentées} \\ C &\mapsto \Omega C. \end{aligned}$$

L'algèbre sous-jacente de ΩC est l'algèbre tensorielle libre :

$$T^a(\mathrm{s}^{-1}\, C^+) = k \oplus \bigoplus_{n \geq 1} (\mathrm{s}^{-1}\, C^+)^{\otimes n}$$

de produit

$$\mu_{\Omega C}((\mathrm{s}^{-1}\, c_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}^{-1}\, c_r) \otimes (\mathrm{s}^{-1}\, c_{r+1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}^{-1}\, c_n)) = (\mathrm{s}^{-1}\, c_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}^{-1}\, c_n).$$

La différentielle $d_{\Omega C} : \Omega C \to \Omega C$ est l'unique dérivation induite par

$$\mathrm{s}^{-1}\, C^+ \xrightarrow{-\mathrm{s}^{-1}\, d_{C^+}\, \mathrm{s} + (\mathrm{s}^{-1} \otimes \mathrm{s}^{-1}) \nabla_{C^+}\, \mathrm{s}} \mathrm{s}^{-1}\, C^+ \oplus (\mathrm{s}^{-1}\, C^+)^{\otimes 2} \rightarrowtail T^a(\mathrm{s}^{-1}\, C^+).$$

Cette dérivation s'écrit alors comme la somme de deux dérivations $d_1 + d_2$ où d_1 est la dérivation induite par d_{C^+} et d_2 celle induite par ∇_{C^+}. La coassociativité de ∇_{C^+} implique $d_2^2 = 0$, le fait $d_{C^+}^2 = 0$ implique $d_1^2 = 0$ et le fait que d_{C^+} est une codérivation pour ∇_{C^+} implique que $d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$. Ainsi, $d_{\Omega C}^2 = 0$. Explicitement,

$$\begin{aligned} d_{\Omega C}(\mathrm{s}^{-1}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}^{-1}\, a_n) = &\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\epsilon_0}\, \mathrm{s}^{-1}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}^{-1}\, d_{C^+}(a_i) \otimes \cdots \mathrm{s}^{-1}\, a_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\epsilon_1}\, \mathrm{s}^{-1}\, a_1 \otimes \cdots \otimes (\mathrm{s}^{-1} \otimes \mathrm{s}^{-1}) \nabla_{C^+}(a_i) \otimes \cdots \mathrm{s}^{-1}\, a_n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \sum_{s=0}^{i-1} |a_s| + i \\ \epsilon_1 &= \sum_{s=0}^{i-1} |a_s| + i - 1. \end{aligned}$$

Adjonction

Le foncteur Ω restreint aux dg-cogèbres conilpotentes est un adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{B}$. En fait :

Lemme 1.2.2. *Pour toute dg-algèbre augmentée A et dg-cogèbre conilpotente C, il y a des bijections naturelles*

$$\mathrm{Hom}_{dg\text{-}alg}(\Omega C; A) \cong \mathrm{Tw}(C; A) \cong \mathrm{Hom}_{dg-cog}(C; \mathcal{B}\, A).$$

Démonstration. Soit $f : \Omega C \to A$ un morphisme de dg-algèbres. Par liberté de ΩC, il se restreint à un unique morphisme linéaire $\widetilde{f} : \mathrm{s}^{-1} C^+ \to A$. La compatibilité avec la différentielle $d_A f - f d_{\Omega C} = 0$ équivaut à $d_A \widetilde{f} + f(\mathrm{s}^{-1} d_{C^+} \mathrm{s} - (\mathrm{s}^{-1} \otimes \mathrm{s}^{-1}) \nabla_{C^+} \mathrm{s}) = 0$ sur $\mathrm{s}^{-1} C^+$. C'est à dire, à $d_A \widetilde{f} + \widetilde{f} \mathrm{s}^{-1} d_{C^+} \mathrm{s} - \mu_A(\widetilde{f} \otimes \widetilde{f})(\mathrm{s}^{-1} \otimes \mathrm{s}^{-1}) \nabla_{C^+} \mathrm{s} = 0$. En posant α tel que $\alpha \circ s = \widetilde{f}$, on obtient $d_A \alpha + \alpha d_{C^+} + \alpha \smile \alpha = 0$. On remarque que f étant un morphisme d'algèbres augmentées, $\alpha : C^+ \to A^+$. On procède de même pour la bijection de droite. $\square$

2

Les G-(co)algèbres homotopiques

Dans ce chapitre, on s'intéresse principalement à trois types de structures algébriques :

1. les G-algèbres homotopiques (ou algèbres de Gerstenhaber-Voronov) ;
2. les G-cogèbres homotopiques (ou cogèbres de Gerstenhaber-Voronov) ;
3. les BV-algèbres homotopiques.

En homologie on obtient que :

1. si A est une G-algèbre homotopique, alors $H_*(A)$ est une algèbre de Gerstenhaber ;
2. si A est une BV-algèbre homotopique, alors $H_*(A)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.

2.1 Algèbres et cogèbres de Hirsch, G-algèbres et G-cogèbres homotopiques

Une propriété remarquable de la structure de G-algèbre homotopique est qu'elle s'interprète comme la donnée d'un produit sur la construction bar associée à la dg-algèbre sous-jacente. Plus précisément, ce produit est un morphisme de dg-cogèbres, donc confère une structure de dg-bigèbre à la construction bar, et doit vérifier une conditions d'asymétrie (voir Remarque 2.1.5). De manière moins restrictive, l'absence de cette condition d'asymétrie pour un produit

$$\mu : \mathcal{B}\,A \otimes \mathcal{B}\,A \to \mathcal{B}\,A,$$

sur la construction bar d'une dg-algèbre A, conduit à des opérations

$$E_{j,k} : A^{\otimes j} \otimes A^{\otimes k} \to A,$$

pour $j,k \geq 0$, $(j,k) \neq (0,0)$, satisfaisant certaines relations. Une telle structure est connue sous le nom d'algèbre de Hirsch.

Une version encore plus générale de ces algèbres de Hirsch existe : les B_∞-algèbres — introduites dans [GJ94] — dans lesquelles l'algèbre sous-jacente A est une A_∞-algèbre.

À titre de comparaison on regroupe ces différentes structures :

	A		$T^c(sA^+)$
dg-algèbre	(d_A, μ_A)	dg-cogèbre	d induite par d_A et μ_A
A_∞-algèbre	$\{\mu_k\}$	dg-cogèbre	d induite par μ_k pour $k \geq 0$
G-algèbre hom.	$(d_A, \mu, \{E_{1,k}\})$	dg-bigèbre	d induite par d_A et μ ; produit μ_E "asymétrique"
Algèbre de Hirsch	$(d_A, \mu, \{E_{i,j}\})$	dg-bigèbre	d induite par d_A et μ ; produit μ_E
B_∞-algèbre	$(\{\mu_k\}, \{E_{i,j}\})$	dg-bigèbre	d induite par μ_k pour $k \geq 0$; produit μ_E

Définition 2.1.1. Une algèbre de Hirsch (A, d, μ_A, μ_E) est la donnée d'un produit

$$\mu_E : \mathcal{B}\, A \otimes \mathcal{B}\, A \to \mathcal{B}\, A$$

sur la construction bar de la dg-algèbre (A, d, μ_A) tel que $\mathcal{B}\, A$ soit une dg-bigèbre unitaire.

En vertu du Lemme 1.2.2, le produit μ_E correspond à une cochaîne tordante $\widetilde{E} : \mathcal{B}\, A \otimes \mathcal{B}\, A \to A$. Sa (i,j)-ème composante est

$$\widetilde{E}_{i,j} : (\mathrm{s}\, A)^{\otimes i} \otimes (\mathrm{s}\, A)^{\otimes j} \to A.$$

On note $E_{i,j} : A^{\otimes i} \otimes A^{\otimes j} \to A$ la composante

$$\begin{aligned} E_{i,j}(a_1 \otimes ... \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes ... \otimes a_{i+j}) \\ := (-1)^{\sum_{s=1}^{i+j-1} |a_s|(i+j-s)} \widetilde{E}_{i,j}(\mathrm{s}^{\otimes i} \otimes \mathrm{s}^{\otimes j})(a_1 \otimes ... \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes ... \otimes a_{i+j}) \\ = \widetilde{E}_{i,j}(\mathrm{s}\, a_1 \otimes ... \otimes \mathrm{s}\, a_i \otimes \mathrm{s}\, a_{i+1} \otimes ... \otimes \mathrm{s}\, a_{i+j}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

pour tous éléments homogènes $a_1, \cdots, a_{i+j} \in A$.
Le degré de $E_{i,j}$ est $i + j - 1$.

On explicite ce que donnent les relations d'unitarité, d'associativité du produit μ_E ainsi que la compatibilité avec la différentielle.

La condition d'unitarité

Pour tout $\mathrm{s}\,\underline{a} = \mathrm{s}\, a_1 \otimes ... \otimes \mathrm{s}\, a_i \in BA$ on a :

$$\mu_E(1_A \otimes \underline{\mathrm{s}\, a}) = \mu_E(\underline{\mathrm{s}\, a} \otimes 1_A) = \underline{\mathrm{s}\, a} \tag{2.2}$$

Le produit étant déterminé par sa projection sur A on obtient :

$$pr\mu_E(1_A \otimes \underline{\mathrm{s}\, a}) = \widetilde{E}_{0,i}(1_A \otimes \underline{\mathrm{s}\, a}) = pr(\mathrm{s}\, a_1 \otimes ... \otimes \mathrm{s}\, a_i) = \begin{cases} a_1 & \text{si } \; i = 1; \\ 0 & \text{si } \; i \neq 1, \end{cases}$$

ainsi que la relation symétrique. Ainsi,

$$E_{0,i} = E_{i,0} = 0 \;\text{ pour tout }\; i \neq 1 \qquad \text{et} \qquad E_{0,1} = E_{1,0} = Id_A. \tag{2.3}$$

La condition d'associativité

Par simplicité, on note $E_{i,j}(a_1,...,a_i;b_1,...b_j)$ pour $E_{i,j}((a_1\otimes...\otimes a_i)\otimes(b_1\otimes...\otimes b_j))$. Sur $A^{\otimes i}\otimes A^{\otimes j}\otimes A^{\otimes k}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&E_{1,k}(E_{i,j}(a_1,...,a_i;b_1,...b_j);c_1,...,c_k)+\\
&\qquad\sum_{n=1}^{i+j}\sum_{\substack{0\le i_1\le...\le i_n\le i\\ 0\le j_1\le...\le j_n\le j}}(-1)^{\alpha_1}E_{n+1,k}(E_{i_1,j_1}(a_1,...,a_{i_1};b_1,...b_{j_1}),...\\
&\qquad\qquad ...,E_{i-i_n,j-j_n}(a_{i_n+1},...,a_i;b_{j_n+1},...b_j);c_1,...,c_k)\\
&=\sum_{m=1}^{j+k}\sum_{\substack{0\le j_1\le...\le j_m\le j\\ 0\le k_1\le...\le k_m\le k}}(-1)^{\alpha_2}E_{i,m+1}(a_1,...,a_i;E_{j_1,k_1}(b_1,...,b_{j_1};c_1,...c_{k_1}),...\\
&\qquad\qquad ...,E_{j-j_m,k-k_m}(b_{j_m+1},...,b_j;c_{k_m+1},...c_k))\\
&\qquad\qquad\qquad +E_{i,1}(a_1,...,a_i;E_{j,k}(b_1,...,b_j;c_1,...c_k))
\end{aligned}\tag{2.4}$$

où

$$\alpha_1=\sum_{u=1}^{n}\left(\sum_{s=i_u+1}^{i_{u+1}}|a_s|+i_{u+1}-i_u\right)\left(\sum_{s=1}^{j_u}|b_s|+j_u\right)$$

$$\alpha_2=\sum_{u=1}^{m}\left(\sum_{s=j_u+1}^{j_{u+1}}|b_s|+j_{u+1}-j_u\right)\left(\sum_{s=1}^{k_u}|c_s|+k_u\right)$$

avec

$$i_0=0;\quad j_0=0;\quad k_0=0;$$
$$i_{n+1}=i;\quad j_{n+1}=j_{m+1}=j;\quad k_{m+1}=k.$$

Pour $i=j=k=1$, c'est à dire sur $A\otimes A\otimes A$, la relation (2.4) donne :

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(E_{1,1}(a;b);c)&=E_{1,1}(a;E_{1,1}(b;c))+E_{1,2}(a;b,c)+(-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,2}(a;c,b)\\
&\quad-E_{2,1}(a,b;c)-(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}E_{2,1}(b,a;c).
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Le produit comme application de complexes

Sur $A^{\otimes i} \otimes A^{\otimes j}$, la projection de $d_{\mathcal{B}}\mu_E = \mu_E(d_{\mathcal{B}} \otimes 1 + 1 \otimes d_{\mathcal{B}})$ donne :

$$\begin{aligned} d_A E_{i,j}(a_1, ..., a_i; b_1, ..., b_j) \\ + \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i \\ 0 \leq j_1 \leq j}} (-1)^{\beta_2} E_{i_1,j_1}(a_1, ..., a_{i_1}; b_1, ..., b_{j_1}) \cdot E_{i-i_1,j-j_1}(a_{i_1+1}, ..., a_i; b_{j_1+1}, ..., b_j) = \\ = \sum_{l=1}^{i} (-1)^{\beta_3} E_{i,j}(a_1, ..., d_A(a_l), ..., a_i; b_1, ..., b_j) \\ + \sum_{l=1}^{i-1} (-1)^{\beta_4} E_{i-1,j}(a_1, ..., a_l \cdot a_{l+1}, ..., a_i; b_1, ..., b_j) \\ + \sum_{l=1}^{j} (-1)^{\beta_5} E_{i,j}(a_1, ..., a_i; b_1, ..., d_A(b_l), ..., b_j) \\ + \sum_{l=1}^{j-1} (-1)^{\beta_6} E_{i,j-1}(a_1, ..., a_i; b_1, ..., b_l \cdot b_{l+1}, ..., b_j) \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \sum_{s=1}^{i_1} |a_s| + \sum_{s=1}^{j_1} |b_s| + i_1 + j_1 + \left(\sum_{s=i_1+1}^{i} |a_s| + i - i_1 \right) \left(\sum_{s=1}^{j_1} |b_s| + j_1 \right) \\ \beta_3 &= \eta_0(\underline{\mathrm{s}\, a}) \\ \beta_4 &= \eta_1(\underline{\mathrm{s}\, a}) \\ \beta_5 &= \sum_{s=1}^{i} |a_s| + i + \eta_0(\underline{\mathrm{s}\, b}) \\ \beta_6 &= \sum_{s=1}^{i} |a_s| + i + \eta_1(\underline{\mathrm{s}\, b}). \end{aligned}$$

Les signes

$$\begin{aligned} \eta_0(\underline{\mathrm{s}\, a}) &= \sum_{s=1}^{l-1} |a_s| + l \\ \eta_1(\underline{\mathrm{s}\, a}) &= \sum_{s=1}^{l} |a_s| + l, \end{aligned}$$

pour $\underline{\mathrm{s}\, a} = \mathrm{s}\, a_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, a_i$, sont les signes relatifs à la différentielle de la construction bar, cf. (1.9). De même avec $\underline{\mathrm{s}\, b} = \mathrm{s}\, b_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}\, b_j$.

Remarque 2.1.2. Lorsque la cochaîne tordante $\widetilde{E} : \mathcal{B}\, A \otimes \mathcal{B}\, A \to A$ est de composantes nulles sauf les composantes $E_{1,0}$ et $E_{0,1}$, alors A est une dg-algèbre commutative.

Définition 2.1.3. Lorsque la cochaîne tordante $\widetilde{E} : \mathcal{B}\, A \otimes \mathcal{B}\, A \to A$ à ses composantes $\widetilde{E}_{i,j} = 0$ pour $i \geq 2$, alors $(A, d, \mu_A, \{E_{1,j}\})$ est appelée une G-algèbre homotopique.

Remarque 2.1.4. La famille des opérations $E_{1,j}$, abstraction faite du produit de A, définit une structure d'algèbre de *Braces* sur A. L'existence d'un produit sur une algèbre de *Braces* entraîne une série de relations avec les opérations $E_{1,j}$ formant automatiquement une G-algèbre homotopique, cf. [GV95].

Remarque 2.1.5. Dire que $E_{i,j} = 0$ pour $i \geq 2$ équivaut à ce que pour tout entier r, $I_r := \oplus_{n \geq r} (s^{-1} A^+)^{\otimes n}$ soit un idéal à droite pour le produit $\mu_E : \mathcal{B} A \otimes \mathcal{B} A \to \mathcal{B} A$, cf. [LR10, Proposition 3.2].

L'équation (2.6) donne, pour une G-algèbre homotopique A, les trois égalités suivantes.

Sur $A^{\otimes 1} \otimes A^{\otimes 1}$:

$$d_A E_{1,1}(a;b) - E_{1,1}(d_A a;b) + (-1)^{|a|} E_{1,1}(a;d_A b) = (-1)^{|a|} \Big(a \cdot b - (-1)^{|a||b|} b \cdot a \Big). \tag{2.7}$$

On notera parfois $\cup_1$ l'opération $E_{1,1}$ qui est une homotopie à la commutativité du produit de A. Sur $A^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 1}$:

$$E_{1,1}(a_1 \cdot a_2; b) = a_1 \cdot E_{1,1}(a_2;b) + (-1)^{|a_2|(|b|-1)} E_{1,1}(a_1;b) \cdot a_2. \tag{2.8}$$

Sur $A^{\otimes 1} \otimes A^{\otimes 2}$:

$$\begin{aligned} d_A E_{1,2}(a;b_1,b_2) + E_{1,2}(d_A a;b_1,b_2) + (-1)^{|a|+1} E_{1,2}(a;d_A b_1,b_2) + (-1)^{|a|+|b_1|} E_{1,2}(a;b_1,d_A b_2) \\ = (-1)^{|a|+|b_1|+1} \Big(E_{1,1}(a;b_1) b_2 + (-1)^{(|a|-1)|b_1|} b_1 E_{1,1}(a;b_2) - E_{1,1}(a;b_1 b_2) \Big). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Définition 2.1.6. Un ∞-morphisme de G-algèbres homotopiques, disons entre A et A', est un morphisme de dg-algèbres unitaires entre les constructions bar associées :

$$f : \mathcal{B} A \to \mathcal{B} A'.$$

Un tel morphisme est une collection d'applications

$$f_n : A^{\otimes n} \to A',$$

$n \geq 1$, de degré $1 - n$, sujettes aux relations suivantes (2.10) et (2.11),

$$\sum_{\substack{1 \leq r \leq k+l, \ 0 \leq k_i \leq 1 \\ k_1 + \ldots + k_r = k \\ l_1 + \ldots + l_r = l}} \pm f_r(E^A_{k_1,l_1} \otimes \ldots \otimes E^A_{k_r,l_r}) = \sum_{\substack{1 \leq w \leq l, \ 0 \leq v \leq 1 \\ i_1 + \ldots + i_v = k \\ j_1 + \ldots + j_w = l}} \pm E^{A'}_{v,w}(f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_v}; f_{j_1} \otimes \ldots \otimes f_{j_w}), \tag{2.10}$$

pour tout $k \geq 1$, $l \geq 1$, et

$$\partial f_n = \sum_{j+k+l=n} \pm f_{n-1}(1^{\otimes j} \otimes \mu^A \otimes 1^{\otimes l}) + \sum_{j+k=n} \pm \mu^{A'}(f_j \otimes f_k), \tag{2.11}$$

pour tout $n \geq 1$, où, ∂ est la différentielle de $\mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A')$.

On s'intéresse maintenant à la structure de Gerstenhaber en homologie. Pour fixer les conventions nous rappelons que :

Définition 2.1.7. Une algèbre de Gerstenhaber $(G, \cdot, \{\ ,\ \})$ est une algèbre commutative graduée $(G, \cdot)$ munie d'un crochet de degré 1,

$$\{\ ;\ \} : G \otimes G \to G$$

satisfaisant les relations suivantes :

$$\{a,b\} = -(-1)^{(|a|+1)(|b|+1)}\{b,a\} \quad \text{(Anti-symétrie de degré 1);} \tag{2.12}$$

$$\{a,b\cdot c\} = \{a,b\}\cdot c + (-1)^{(|a|+1)|b|} b\cdot\{a,c\} \quad \text{(Identité de Poisson de degré 1);} \tag{2.13}$$

$$\{a,\{b,c\}\} = \{\{a,b\},c\} + (-1)^{(|a|+1)(|b|+1)}\{b,\{a,c\}\} \quad \text{(Identité de Jacobi de degré 1).} \tag{2.14}$$

Proposition 2.1.8. *Soit $(A, d_A, \cdot, E_{1,k})$ une G-algèbre homotopique. Alors, le crochet*

$$\{a;b\} = E_{1,1}(a;b) - (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}E_{1,1}(b;a)$$

de degré 1 définit une structure d'algèbre de Gerstenhaber sur l'homologie $H(A,d_A)$.

Démonstration. L'égalité (2.7) montre la commutativité à homotopie près du produit de A, qui est alors commutatif en homologie. En effet, il suffit de poser $E^{\#}_{1,1}(a;b) := (-1)^{|a|}E_{1,1}(a;b)$ pour chaque éléments homogènes pour obtenir l'homotopie. La condition d'antisymétrie de degré 1 est vérifiée par construction. La relation de Jacobi de degré 1 se déduit l'équation (2.5). En effet, remarquons en premiers lieux qu'en appliquant (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(a;\{b;c\}) &= E_{1,1}(a;E_{1,1}(b;c)) - (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,1}(a;E_{1,1}(c;b))\\
&= E_{1,1}(E_{1,1}(a;b);c) - (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,1}(E_{1,1}(a;c);b) + R
\end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned}
R &= -E_{1,2}(a;b,c) - (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,2}(a;c,b)\\
&\quad - (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}\Big(-E_{1,2}(a;c,b) - (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,2}(a;b,c)\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned}
\{a;\{b;c\}\} =& E_{1,1}(a;\{b;c\}) - (-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|)}E_{1,1}(\{b;c\};a)\\
=& E_{1,1}(a;\{b;c\})\\
& - (-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|)}\Big(E_{1,1}(E_{1,1}(b;c);a) - (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,1}(E_{1,1}(c;b);a)\Big)\\
=& E_{1,1}(E_{1,1}(a;b);c) - (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,1}(E_{1,1}(a;c);b)\\
& - (-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|)}\Big(E_{1,1}(b;E_{1,1}(c;a)) - (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,1}(c;E_{1,1}(b;a))\Big)\\
& + L,
\end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned}
L = -(-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|)}\Big[&E_{1,2}(b;c,a) + (-1)^{(|c|-1)(|a|-1)}E_{1,2}(b;a,c)\\
&- (-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}\Big(E_{1,2}(c;b,a) + (-1)^{(|b|-1)(|a|-1)}E_{1,2}(c;a,b)\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Par définition,

$$-\{\{a;b\};c\} = -E_{1,1}(E_{1,1}(a;b);c) + (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}E_{1,1}(E_{1,1}(b;a);c) + (-1)^{(|c|-1)(|a|+|b|)}\Big(E_{1,1}(c;E_{1,1}(a;b)) - (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}E_{1,1}(c;E_{1,1}(b;a))\Big).$$

Ainsi, on obtient,

$$\begin{aligned}\{a;\{b;c\}\} - \{\{a;b\};c\} = &-(-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,1}(E_{1,1}(a;c);b)\\ &-(-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|)}E_{1,1}(b;E_{1,1}(c;a))\\ &+(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}E_{1,1}(E_{1,1}(b;a);c)\\ &+(-1)^{(|c|-1)(|a|+|b|)}E_{1,1}(c;E_{1,1}(a;b))\\ &+L.\end{aligned}$$

Finalement, appliquant une dernière fois l'égalité (2.5) sur le 3-ième et 4-ième terme, on obtient

$$\begin{aligned}\{a;\{b;c\}\} - \{\{a;b\};c\} = &-(-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,1}(E_{1,1}(a;c);b)\\ &-(-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|)}E_{1,1}(b;E_{1,1}(c;a))\\ &+(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}E_{1,1}(b;E_{1,1}(a;c))\\ &+(-1)^{(|c|-1)(|a|+|b|)}E_{1,1}(E_{1,1}(c;a);b)\\ &+L+L'\\ =&-(-1)^{(|b|-1)(|c|-1)}E_{1,1}(\{a;c\};b) + (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}E_{1,1}(b;\{a;c\})\\ &+L+L'\\ =&(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}\{b;\{a;c\}\}\\ &+L+L',\end{aligned}$$

où,

$$L' = (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}\Big(E_{1,2}(b;a,c) + (-1)^{(|a|-1)(|c|-1)}E_{1,2}(b;c,a)\Big) + (-1)^{(|c|-1)(|a|+|b|)}\Big(-E_{1,2}(c;a,b) - (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}E_{1,2}(c;b,a)\Big).$$

On vérifie aisément que $L + L' = 0$.

La relation de Poisson de degré 1 se déduit des équations (2.8) et (2.9). En effet, quitte à modifier $E_{1,2}(a;b_1,b_2)$ par $(-1)^{|b_1|}E_{1,2}(a;b_1,b_2)$ dans (2.9), on a :

$$\begin{aligned}\{a;bc\} =&E_{1,1}(a;bc) - (-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|-1)}E_{1,1}(bc;a)\\ \sim&E_{1,1}(a;b)c + (-1)^{(|a|-1)|b|}bE_{1,1}(a;c)\\ &-(-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|-1)}\Big(bE_{1,1}(c;a) + (-1)^{|c|(|a|-1)}E_{1,1}(b;a)c\Big)\\ \sim&\Big(E_{1,1}(a;b) - (-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|-1)+|c|(|a|-1)}E_{1,1}(b;a)\Big)c\\ &+b\Big((-1)^{(|a|-1)|b|}E_{1,1}(a;c) - (-1)^{(|a|-1)(|b|+|c|-1)}E_{1,1}(c;a)\Big)\\ \sim&\{a;b\}c + (-1)^{(|a|-1)|b|}b\{a;c\},\end{aligned}$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence : $a \sim b$ si et seulement si a est homotope à b.

La commutativité du crochet avec la différentielle se déduit l'équation (2.7). En effet,

$$\begin{aligned}
d_A\{a;b\} =& d_A E_{1,1}(a;b) - (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)} d_A E_{1,1}(b;a)\\
=& - E_{1,1}(d_A a;b) - (-1)^{|a|} E_{1,1}(a;d_A b) + (-1)^{|a|}\left(a\cdot b - (-1)^{|a||b|} b\cdot a\right)\\
&-(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}\left(E_{1,1}(d_A b;a) - (-1)^{|b|}E_{1,1}(b;d_A a) + (-1)^{|b|}\left(b\cdot a - (-1)^{|a||b|}a\cdot b\right)\right)\\
=& - E_{1,1}(d_A a;b) - (-1)^{|a|} E_{1,1}(a;d_A b)\\
&- (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}\left(E_{1,1}(d_A b;a) - (-1)^{|b|}E_{1,1}(b;d_A a)\right)\\
&+ (-1)^{|a|}\left(a\cdot b - (-1)^{|a||b|} b\cdot a\right) - (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)+|b|}\left(b\cdot a - (-1)^{|a||b|}a\cdot b\right)\\
=& - E_{1,1}(d_A a;b) - (-1)^{|a|} E_{1,1}(a;d_A b)\\
&- (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}\left(E_{1,1}(d_A b;a) - (-1)^{|b|}E_{1,1}(b;d_A a)\right)\\
=& - \{d_A a;b\} - (-1)^{|a|}\{a;d_A b\}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.9. *Un ∞-morphisme de G-algèbres homotopiques induit en homologie un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber.*

Démonstration. Prenons la convention $f_i := \widetilde{f_i}(s^{\otimes i})$, alors l'équation (2.10) donne pour $k = l = 1$:

$$E_{1,1}(f_1(a);f_1(b)) - f_1 E_{1,1}(a;b) = (-1)^{|a|-1} f_2(a;b) + (-1)^{|a|(|b|-1)} f_2(b;a). \tag{2.15}$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
\{f_1(a);f_1(b)\} &= E_{1,1}(f_1(a);f_1(b)) - (-1)^{|a|-1)(|b|-1)} E_{1,1}(f_1(b);f_1(a))\\
&= f_1 E_{1,1}(a;b) + (-1)^{|a|-1} f_2(a;b) - (-1)^{|a|(|b|-1)} f_2(b;a)\\
&\quad - (-1)^{|a|-1)(|b|-1)}\left(f_1 E_{1,1}(b;a) + (-1)^{|b|-1} f_2(b;a) - (-1)^{|b|(|a|-1)} f_2(a;b)\right)\\
&= f_1(\{a;b\}).
\end{aligned}$$

□

2.2 Cogèbres de Hirsch, G-cogèbres homotopiques

On développe dans cette section la notion duale (au sens catégorique) des algèbres de Hirsch : les cogèbres de Hirsch. Ce type de structures, notamment les G-cogèbres homotopiques, apparait sur les chaînes d'un ensemble simplicial. Dualement aux G-algèbres homotopiques, ceci correspond à un dg-coproduit sur la construction cobar de sorte que celle-ci soit une dg-bigèbre. Un tel coproduit, dans le cas de la construction cobar d'un ensemble simplicial, a été construit par Baues [Bau81, Bau98] et correspond au coproduit sur les chaînes cubiques de l'espace des lacets pointés. Cette construction cobar est également une dg-algèbre de Hopf. Nous utiliserons la structure de G-cogèbre homotopique sur les chaînes de l'ensemble simplicial de base comme moyen de contrôler l'involutivité de l'antipode.

Définition 2.2.1. Une cogèbre de Hirsch $(C, d, \nabla_C, E = \{E^{i,j}\})$ est la donnée d'un coproduit $\nabla_E : \Omega C \to \Omega C \otimes \Omega C$ sur la construction cobar de la dg-cogèbre (C, d, ∇_C) tel que ΩC soit une dg-bigèbre counitaire.

En vertu du Lemme 1.2.2, le coproduit ∇_E correspond à une cochaîne tordante

$$E : s^{-1} C^+ \to \Omega C \otimes \Omega C.$$

Sa (i,j)-composante est notée

$$E^{i,j} : s^{-1} C^+ \to (s^{-1} C^+)^{\otimes i} \otimes (s^{-1} C^+)^{\otimes j}.$$

Pour simplifier les notations on pose $\overline{C} := s^{-1} C^+$.
Ainsi, on a

$$E^{i,j} : \overline{C} \to \overline{C}^{\otimes i} \otimes \overline{C}^{\otimes j}.$$

Le degré de $E^{i,j}$ est 0.

On explicite ce que donne la relation de counité, la compatibilité avec la différentielle et la coassociativité du coproduit.

La condition de counité

L'existence d'une counité $(\epsilon \otimes 1)\nabla_E = (1 \otimes \epsilon)\nabla_E = Id$, donne :

$$E^{0,1} = E^{1,0} = Id_{\overline{C}} \quad \text{et} \quad E^{0,k} = E^{k,0} = 0 \ \text{ pour } k > 1. \tag{2.16}$$

La condition de compatibilité avec la différentielle

On étudie la relation $(d_\Omega \otimes 1 + 1 \otimes d_\Omega)\nabla_E = \nabla_E d_\Omega$.

Sur la composante $\overline{C}^{\otimes k} \otimes \overline{C}^{\otimes l} \subset \Omega C \otimes \Omega C$, on obtient :

$$\begin{aligned} d_{\overline{C}^{\otimes k} \otimes \overline{C}^{\otimes l}} E^{k,l} - E^{k,l} d_{\overline{C}} = &- \sum_{i+2+j=k} ((1^{\otimes i} \otimes \nabla_{\overline{C}} \otimes 1^{\otimes j}) \otimes 1^{\otimes l}) E^{k-1,l} \\ &- \sum_{i+2+j=l} (1^{\otimes k} \otimes (1^{\otimes i} \otimes \nabla_{\overline{C}} \otimes 1^{\otimes j})) E^{k,l-1} \\ &+ \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ l_1+l_2=l}} \mu_{\Omega\otimes\Omega}(E^{k_1,l_1} \otimes E^{k_2,l_2}) \nabla_{\overline{C}}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

où, $k_1 + l_1 > 0$ et $k_2 + l_2 > 0$.

Les termes $\mu_{\Omega\otimes\Omega}(E^{k_1,l_1} \otimes E^{k_2,l_2})\nabla_{\overline{C}}$ se lisent comme suit. On note

$$E^{k,l}(a) = a^{|\overleftarrow{k}} \otimes a^{|\overrightarrow{l}} \quad \text{et} \quad \nabla_{\overline{C}}(a) = a^1 \otimes a^2.$$

Alors,

$$\mu_{\Omega\otimes\Omega}(E^{k_1,l_1} \otimes E^{k_2,l_2})\nabla_{\overline{C}} = \pm(a^{1|\overleftarrow{k_1}} \otimes a^{2|\overleftarrow{k_2}}) \otimes (a^{1|\overrightarrow{l_1}} \otimes a^{2|\overrightarrow{l_2}}).$$

Sur $\overline{C} \otimes \overline{C} \subset \Omega C \otimes \Omega C$, l'équation (2.17) donne :

$$d_{\overline{C}\otimes\overline{C}} E^{1,1} - E^{1,1} d_{\overline{C}} = \nabla_{\overline{C}} + \tau \nabla_{\overline{C}}; \tag{2.18}$$

ce qui donne sur $C^+ \otimes C^+$:

$$d_{C^+\otimes C^+} E_+^{1,1} + E_+^{1,1} d_{C^+} = \nabla_{C^+} - \tau\nabla_{C^+}, \tag{2.19}$$

en posant $E^{1,1} = (\mathrm{s}^{-1} \otimes \mathrm{s}^{-1}) E_+^{1,1}\,\mathrm{s}$.
Ainsi, $E_+^{1,1}$ est une homotopie pour la cocommutativité du coproduit ∇_{C^+}. On la distingue des autres co-opérations $E^{i,1}$ en la notant parfois ∇_1 comme version duale du $\cup_1$-produit.

La condition de coassociativité

Sur la composante $\overline{C}^{\otimes i} \otimes \overline{C}^{\otimes j} \otimes \overline{C}^{\otimes k}$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{i+j} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_n=i \\ j_1+\ldots+j_n=j}} (\mu^{(n)}_{\Omega\otimes\Omega}(E^{i_1,j_1} \otimes \ldots \otimes E^{i_n,j_n}) \otimes 1^{\otimes k}) E^{n,k} \\ = &\sum_{n=0}^{j+k} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_n=j \\ k_1+\ldots+k_n=k}} (1^{\otimes i} \otimes \mu^{(n)}_{\Omega\otimes\Omega}(E^{j_1,k_1} \otimes \ldots \otimes E^{j_n,k_n})) E^{i,n}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

En particulier pour $i = j = k = 1$ on a :

$$(E^{1,1} \otimes 1)E^{1,1} + (1 \otimes 1)E^{2,1} + (\tau \otimes 1)E^{2,1} = (1 \otimes E^{1,1})E^{1,1} + (1 \otimes 1)E^{1,2} + (1 \otimes \tau)E^{1,2}.$$

C'est à dire,

$$(E^{1,1} \otimes 1)E^{1,1} - (1 \otimes E^{1,1})E^{1,1} = (1 \otimes (1+\tau))E^{1,2} - ((1+\tau) \otimes 1)E^{2,1}. \tag{2.21}$$

Les co-opérations $E^{1,2}$ et $E^{2,1}$ contrôlent le défaut de coassociativité de $E^{1,1}$.

Définition 2.2.2. Une G-cogèbre homotopique $(C, d, \nabla_C, E^{i,1})$ est une cogèbre de Hirsch dont les co-opérations $E^{i,j}$ sont nulles pour tout $j \geq 2$.

Remarque 2.2.3. Dire que $E^{i,j} = 0$ pour $j \geq 2$ équivaut à ce que pour tout entier r, $J_r := \oplus_{n\leq r} \overline{C}^{\otimes n}$ soit un coidéal à gauche pour le coproduit $\nabla_E : \Omega C \to \Omega C \otimes \Omega C$.

2.3 Algèbres de Batalin-Vilkovisky et BV-algèbres homotopiques à la Gerstenhaber-Voronov

Dans cette courte section, nous rappelons la définition d'une algèbre de Batalin-Vilkovisky et en définissons une version homotopique à la Gerstenhaber-Voronov.

Définition 2.3.1. [Get94] Une algèbre de Batalin-Vilkovisky A est une algèbre de Gerstenhaber munie d'un opérateur $\Delta : A_* \to A_{*+1}$ tel que :

1. $\Delta^2 = 0$;
2. $\{a, b\} = (-1)^{|a|}\Delta(a \cdot b) - (-1)^{|a|}\Delta(a) \cdot b - a \cdot \Delta(b)$ pour tous éléments homogènes $a, b \in A$,

où $\{-, -\}$ est le crochet de Gerstenhaber.

L'exemple qui nous intéresse, est celui découvert par E. Getzler sur l'homologie des espaces de lacets doubles ; l'opérateur de BV est induit par l'action diagonale de S^1 sur la sphère S^2 (à la source) et sur X (au but).

Théorème 2.3.2. *[Get94] Soit X un S^1-espace topologique connexe pointé. Alors, l'homologie de l'espace des lacets pointés doubles $H_*(\Omega^2 X)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.*

Définition 2.3.3. Une BV-algèbre homotopique A est une G-algèbre homotopique munie d'une application de dg-espaces vectoriels $\Delta : A \to A$ sujette aux deux relations suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= 0;\\ \{a;b\} &= (-1)^{|a|}\left(\Delta(a\cdot b) - \Delta(a)\cdot b - (-1)^{|a|} a\cdot\Delta(b)\right)\\ &\quad + d_A H(a;b) + H(d_A a;b) + (-1)^{|a|} H(a; d_A b),\end{aligned}$$

pour tous éléments homogènes $a, b \in A$, où, $\{-,-\}$ est le crochet de Gerstenhaber

$$\{a,b\} = E_{1,1}(a;b) - (-1)^{(|a|+1)(|b|+1)} E_{1,1}(b;a),$$

et $H : A \otimes A \to A$ est une application de degré 2.

Proposition 2.3.4. *L'homologie $H_*(A)$ d'une BV-algèbre homotopique A est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.*

Définition 2.3.5. Un ∞-morphisme entre deux BV-algèbres homotopiques est un ∞-morphisme, disons f, entre les G-algèbres homotopiques sous-jacentes, tel que l'application linéaire f_1 commute avec l'opérateur de BV, i.e. $f_1\Delta = \Delta f_1$.

Digression. L'opérade $\mathcal{BV}$ codant les algèbres de Batalin-Vilkovisky est l'opérade libre sur les générateurs $\mu, \{-;-\}, \Delta$ quotientée par les relations relatives aux algèbres de Gerstenhaber et celles relatives à l'opérateur de BV. Bien qu'elle ne soit pas une opérade quadratique (la relation $\{a,b\} = (-1)^{|a|}\Delta(a\cdot b) - (-1)^{|a|}\Delta(a)\cdot b - a\cdot\Delta(b)$ n'est pas homogène) il est possible d'adapter la théorie de Koszul des opérades quadratiques aux opérades inhomogènes quadratiques. De là, on obtient une résolution cofibrante $\mathcal{BV}_\infty$ de l'opérade $\mathcal{BV}$ voir [GCTV12]. Une résolution minimale de $\mathcal{BV}$ est construite dans [DCV13]. Sur un corps de caractéristique nulle, l'opérade des complexes de chaînes de l'opérade des 2-petits disques orientés, $C_*(f\mathcal{D}_2)$ est connue pour être formelle [Šev10, GS10]. Cette formalité est utilisée dans [GCTV12] pour montrer l'existence d'un quasi-isomorphisme de l'opérade $\mathcal{BV}_\infty$ vers l'opérade $C_*(f\mathcal{D}_2)$ relevant le quasi-isomorphisme de résolution $\mathcal{BV}_\infty \to \mathcal{BV}$. Ainsi, le complexe de chaînes d'un espace de lacets doubles, $C_*(\Omega^2 X)$, est une algèbre sur l'opérade $\mathcal{BV}_\infty$. De plus, cette structure relève la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky de $H_*(\Omega^2 X)$ démontrée par Getzler.

La double construction cobar est un modèle des chaînes cubiques des espaces de lacets doubles. On s'attend alors à ce qu'elle soit une algèbre sur l'opérade $\mathcal{BV}_\infty$, au moins en caractéristique nulle. En fait, on peut en amont avoir les mêmes attentes concernant le cas de l'opérade $\mathcal{G}_\infty$ résolution cofibrante minimale de l'opérade de Gerstenhaber $\mathcal{G}$. En effet, on sait par les travaux de F. Cohen [Coh76] que l'homologie d'un espace de lacets doubles est une algèbre de Gerstenhaber. Et la formalité, en caractéristique nulle, de l'opérade $C_*(\mathcal{D}_2)$ fournit un quasi-isomorphisme de $\mathcal{G}_\infty$ vers $C_*(\mathcal{D}_2)$ relevant le quasi-isomorphisme de résolution $\mathcal{G}_\infty \to \mathcal{G}$. Suite aux résultats de T. Kadeishvili [Kad05], la double construction cobar (sur un ensemble simplicial) est une G-algèbre homotopique. Cette structure algébrique — connue aussi sous le nom d'algèbre de Gerstenhaber-Voronov [GV95] — est équivalente à l'opérade $C_*(\mathcal{D}_2)$, cf. [MS02]. En revanche, l'utilisation de la quantification d'Etingof-Kazhdan pour les bigèbres de Lie [EK98] permet d'obtenir d'une G-algèbre homotopique une $\mathcal{G}_\infty$-algèbre [TT00]. □

3

Construction cobar sur des gèbres

Ce chapitre est dédié à l'étude de la construction cobar sur des sous-catégories de la catégorie des cogèbres 1-connexes telles que la catégorie des dg-bigèbres 1-connexes et la catégorie des dg-algèbres de Hopf involutives 1-connexes. Les restrictions successives à ces sous-catégories se traduisent par un ajout de structure sur la construction cobar. On obtient le tableau de correspondances suivant :

C	ΩC
dg-cogèbre	dg-algèbre
dg-bigèbre	G-algèbre homotopique
dg-algèbre de Hopf involutive	BV-algèbre homotopique

La structure de G-algèbre homotopique sur la construction cobar est due à T. Kadeishvili [Kad05], celle de BV-algèbre homotopique à L. Menichi [Men04].

La structure de BV-algèbre homotopique sur la construction cobar présentée ici a pour BV-opérateur, l'opérateur de Connes-Moscovici [CM00]. Ce dernier joue un rôle essentiel dans l'homologie de Hochschild cyclique des algèbres de Hopf (involutives). Il requiert l'existence d'une antipode involutive pour être une application de complexes. Comme nous le verrons dans la Section 4.2, la construction cobar d'un ensemble simplicial est munie d'une structure de dg-algèbre de Hopf. Une telle structure correspond à une structure de G-cogèbre homotopique sur les chaînes d'un ensemble simplicial. En vue d'obtenir une structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar, nous analysons l'antipode de la construction cobar d'une G-cogèbre homotopique. On dégage ainsi un critère d'involutivité pour l'antipode en terme de co-opérations O_n, $n \geq 2$, sur la G-cogèbre homotopique. On étudiera ce critère dans la Section 4.3 où la G-cogèbre homotopique sera le complexe de chaînes d'un ensemble simplicial. Schématiquement, nous avons :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} C \\ \text{G-cogèbre} \\ \text{homotopique} \end{array}} \arrow[r, "\text{Section 2.2}"] & \boxed{\begin{array}{c} B = \Omega C \\ \text{dg-bigèbre} \end{array}} \arrow[r, "\text{Section 3.1}"] & \boxed{\begin{array}{c} \Omega B = \Omega^2 C \\ \text{G-algèbre} \\ \text{homotopique} \end{array}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} C \\ \text{G-cogèbre} \\ \text{homotopique} \\ \text{avec } O_n = 0 \end{array}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Section 3.3}"] & \boxed{\begin{array}{c} \mathcal{H} = \Omega C \\ \text{dg-algèbre de} \\ \text{Hopf involutive} \\ (S^2 = Id) \end{array}} \arrow[r, "\text{Section 3.2}"] & \boxed{\begin{array}{c} \Omega \mathcal{H} = \Omega^2 C \\ \text{BV-algèbre} \\ \text{homotopique} \end{array}}
\end{tikzcd}$$

3.1 Structure de G-algèbre homotopique sur la construction cobar d'une dg-bigèbre

Dans cette section nous rappelons la structure de G-algèbre homotopique définie par T. Kadeishvili [Kad05] sur la construction cobar d'une dg-bigèbre. La méthode employée est constructive, la structure, explicite.

Tout au long de cette section $(B, d, \cdot, \eta, \nabla, \epsilon)$ sera une dg-bigèbre 1-connexe et B^+ sera la dg-bigèbre réduite de différentielle $d : B^+ \to B^+$ de degré -1, de coproduit $\overline{\nabla} : B^+ \to B^+ \otimes B^+$ et de produit $\cdot : B^+ \otimes B^+ \to B^+$. La notation de Sweedler (cf. 1.1.4) sera réservée au coproduit non-réduit (et ses itérés) de B. On construit les opérations

$$E_{1,k} : (\Omega B)^+ \otimes ((\Omega B)^+)^{\otimes k} \to (\Omega B)^+,$$

pour $k \geq 1$. Commençons par l'opération $E_{1,1}$.
On pose en premier lieu $E_{1,1}(s^{-1} a; s^{-1} b) := s^{-1}(a \cdot b)$. On étend ensuite ceci à l'aide de l'équation (2.6) à :

$$E_{1,1}(s^{-1} a_1 \otimes ... \otimes s^{-1} a_m; s^{-1} b) := \sum_{l=1}^{m} (-1)^{\gamma_1} s^{-1} a_1 \otimes ... \otimes s^{-1}(a_l \cdot b) \otimes s^{-1} a_{l+1} \otimes ... \otimes s^{-1} a_m,$$

pour tous éléments homogènes $a_1, a_2, \cdots, a_m, b \in B$, avec

$$\gamma_1 = |b| \left(\sum_{s=l+1}^{m} |a_s| - m + l \right).$$

D'autre part, on pose avec un léger abus de notation

$$E_{1,1}(s^{-1} a; s^{-1} b_1 \otimes s^{-1} b_2) := (-1)^{|a^2||b_1| + |a^2|} s^{-1}(a^1 \cdot b_1) \otimes s^{-1}(a^2 \cdot b_2).$$

L'abus venant du fait que les termes $(-1)^{|a||b_1|+|a|} s^{-1}(b_1) \otimes s^{-1}(a \cdot b_2)$ et $s^{-1}(a \cdot b_1) \otimes s^{-1}(b_2)$ font parti de cette somme ; le coproduit évalué sur l'élément a n'est pas réduit.
À l'aide de l'équation (2.6) on étend (toujours avec le même abus de notation) $E_{1,1}$ à

$$E_{1,1}(s^{-1} a; s^{-1} b_1 \otimes ... \otimes s^{-1} b_n) := (-1)^{\gamma_2 + |a| + 1} s^{-1}(a^1 \cdot b_1) \otimes ... \otimes s^{-1}(a^n \cdot b_n),$$

avec

$$\gamma_2 = \gamma_2(a) = \kappa_n(a) + \sum_{u=2}^{n}(|a^u| - 1)\left(\sum_{s=1}^{u-1}|b_s| - u + 1\right) + \sum_{s=1}^{n}(|a^s| - 1)(2n - 2s + 1) + \sum_{s=1}^{n-1}(|a^s| + |b_s|)(n - s),$$

où

$$\kappa_n(a) := \begin{cases} \sum_{1\leq 2s+1\leq n}|a^{2s+1}| & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \sum_{1\leq 2s\leq n}|a^{2s}| & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Finalement,

$$E_{1,1}(s^{-1}a_1 \otimes \ldots \otimes s^{-1}a_m; s^{-1}b_1 \otimes \ldots \otimes s^{-1}b_n) := \sum_{l=1}^{m}(-1)^{\gamma_3}s^{-1}a_1 \otimes \ldots (a_l^1 \cdot b_1) \otimes \ldots \otimes s^{-1}(a_l^n \cdot b_n) \otimes \ldots \otimes s^{-1}a_m \quad (3.1)$$

avec

$$\gamma_3 = \sum_{u=1}^{n}|b_u|\left(\sum_{s=l+u}^{m}|a_s| + m - l - u + 1\right) + \kappa_n(a_l) + \sum_{u=2}^{n}(|a_l^u| - 1)\left(\sum_{s=1}^{u-1}|b_s| - u + 1\right) + \sum_{s=1}^{n}(|a_l^s| - 1)(2n - 2s + 1) + \sum_{s=1}^{n-1}(|a_l^s| + |b_s|)(n - s),$$

où

$$\kappa_n(a) := \begin{cases} \sum_{1\leq 2s+1\leq n}|a^{2s+1}| & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \sum_{1\leq 2s\leq n}|a^{2s}| & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

De la même manière on obtient les opérations

$$E_{1,k} : (\Omega B)^+ \otimes ((\Omega B)^+)^{\otimes k} \to (\Omega B)^+$$

pour $k \geq 1$, définies par :

$$E_{1,k}(s^{-1}a_1 \otimes \ldots \otimes s^{-1}a_n; \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_k) = \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq \ldots\leq i_k\leq n} \pm s^{-1}a_1 \otimes \ldots \otimes s^{-1}a_{i_1-1} \otimes a_{i_1} \diamond \overline{b}_1 \otimes \ldots \otimes s^{-1}a_{i_k-1} \otimes a_{i_k} \diamond \overline{b}_k \otimes s^{-1}a_{i_k+1} \otimes \ldots \otimes s^{-1}a_n \quad (3.2)$$

quand $n \geq k$ et valant zéro quand $n < k$. Ici, $a \diamond \overline{b} := s^{-1}(a^1 \cdot b_1) \otimes \ldots \otimes s^{-1}(a^s \cdot b_s)$ pour $\overline{b} := s^{-1}b_1 \otimes \ldots \otimes s^{-1}b_s$ et $a \in B^+$.

Proposition 3.1.1. *[Kad05] Soit B une dg-bigèbre 1-connexe. Alors la construction cobar $(\Omega B, d_\Omega)$ avec les opérations $E_{1,k}$ définies en (3.2) est une G-algèbre homotopique.*

3.2 Structure de BV-algèbre homotopique sur la construction cobar d'une dg-algèbre de Hopf involutive

On établit une structure de BV-algèbre homotopique sur la construction cobar d'une dg-algèbre de Hopf munie d'une antipode involutive. A. Connes et H. Moscovici [CM00] ont définit un opérateur de bord sur la construction cobar d'une algèbre de Hopf involutive. L. Menichi démontre dans [Men04] que cet opérateur que l'on nomme ici *l'opérateur de Connes-Moscovici*, induit en homologie une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky.

Dans cette section $\mathcal{H}$ sera une dg-algèbre de Hopf 1-connexe munie d'une antipode $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ involutive. On utilisera les mêmes notations que dans la section précédente concernant la structure de dg-bigèbre sous-jacente.

L'opérateur de Connes-Moscovici est donné par la formule suivante :

$$\Delta_{CM}(s^{-1} a_1 \otimes s^{-1} a_2 \otimes ... \otimes s^{-1} a_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\zeta_k+k+1} s^{-1} S(a_k^{n-1}) a_{k+1} \otimes s^{-1} S(a_k^{n-2}) a_{k+2} \otimes ... \otimes s^{-1} S(a_k^{1}) a_{k-1}, \quad (3.3)$$

où le signe $(-1)^{\zeta_k}$ est déterminé ci-après et où l'on note

$$\nabla^{(j)}(a) = a^1 \otimes \cdots \otimes a^{j+1}$$

suivant la convention de Sweedler.
On écrit autrement l'opérateur Δ_{CM}, en faisant un abus de notation relatif au coproduit non réduit. Les opérateurs impliqués seront également utilisés pour définir de façon "lisible" l'homotopie de la Proposition 3.2.1 qui suit.
Si la dg-bigèbre $\mathcal{H}$ n'était pas réduite à $\mathcal{H}^+$, l'opérateur Δ_{CM} pourrait s'écrire d'une manière plus synthétique

$$\Delta_{CM}(s^{-1} a_1 \otimes s^{-1} a_2 \otimes ... \otimes s^{-1} a_n) = \pi_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \tau_n^i \right) (s^{-1} a_1 \otimes s^{-1} a_2 \otimes ... \otimes s^{-1} a_n). \quad (3.4)$$

où τ_n est la permutation cyclique

$$\tau_n(s^{-1} a_1 \otimes s^{-1} a_2 \otimes ... \otimes s^{-1} a_n) := (-1)^{(|a_1|-1)(\sum_{i=2}^{n} |a_i|-1)} s^{-1} a_2 \otimes s^{-1} a_3 \otimes ... \otimes s^{-1} a_n \otimes s^{-1} a_1$$

et

$$\pi_n := (s^{-1} \mu)^{\otimes n-1} \tau_{n-1,n-1} (S^{\otimes n-1} \otimes 1^{\otimes n-1})((\tau \nabla)^{(n-2)} \otimes 1^{n-1})\, s^{\otimes n}$$

avec

$$\tau_{n,n}(a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_n) := (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} |b_i| (\sum_{j=i+1}^{n} |a_j|)} a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \otimes ... \otimes a_n \otimes b_n.$$

Le signe $(-1)^{\zeta_k}$ est le signe de Koszul associé à l'opérateur $\pi_n \tau_n^{k-1}$. Par exemple,

$$\Delta_{CM}(s^{-1} a \otimes s^{-1} b) = (-1)^{|a|-1} s^{-1}(S(a)b) + (-1)^{|a|(|b|-1)+1} s^{-1}(S(b)a).$$

L'involutivité de l'antipode fait de Δ_{CM} une application de complexes de carré nul.

La proposition suivante est une adaptation de [Men04, Proposition 1.9] à notre contexte.

Proposition 3.2.1. *Soit $\mathcal{H}$ une dg-algèbre de Hopf involutive 1-connexe. Alors la cobar construction $(\Omega\mathcal{H}, d_\Omega)$ est une BV-algèbre homotopique d'opérateur de BV, l'opérateur de Connes-Moscovici Δ_{CM} défini en (3.3).*

Démonstration. L'homotopie est donnée par $H(\bar{a};\bar{b}) := H_1(\bar{a};\bar{b}) - (-1)^{(|\bar{a}|-1)(|\bar{b}|-1)} H_1(\bar{b};\bar{a})$.

$$H_1(s^{-1} a_1 \otimes ... \otimes s^{-1} a_m; s^{-1} b_1 \otimes ... \otimes s^{-1} b_n)$$
$$:= \sum_{1 \le j \le p \le m-1} (-1)^{\xi_j+n+1} \pi^s_{m+n-1} \tau^{s,n+m-1-j}_{m+n-1} \rho^{(p-j+1)}_{n+m} (s^{-1} a_1 \otimes ... \otimes s^{-1} a_m \otimes s^{-1} b_1 \otimes ... \otimes s^{-1} b_n) \tag{3.5}$$

avec

$$\xi_j = \begin{cases} \sum_{s=1}^{m} |a_s| & \text{pour } j = 1; \\ \sum_{s=m-j+1}^{m} |a_s| & \text{pour } j > 1. \end{cases}$$

Où,

$$\begin{aligned} \pi^s_m &= \pi_m (s^{-1})^{\otimes m} \\ \tau^{s,i}_m &:= (\tau^s_m)^i \\ \tau_m(a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_m) &:= (-1)^{|a_1|(\sum_{i=2}^n |a_i|)} a_2 \otimes a_3 \otimes ... \otimes a_m \otimes a_1 \\ \rho^{(i)}_{m+1} &:= (1^{\otimes i-1} \otimes \mu \otimes 1^{\otimes m-i})(1^{\otimes i-1} \otimes \tau_{m-i+1,1}) s^{\otimes m+1} \\ \tau_{k,1}(a_1 \otimes ... \otimes a_k \otimes b) &:= (-1)^{|b|(\sum_{i=2}^k |a_i|)} a_1 \otimes b \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_k. \end{aligned}$$

La Proposition [Men04, Proposition 1.9] donne

$$\{a;b\} = (-1)^{|a|} (\Delta_{CM}(a \cdot b) - \Delta_{CM}(a) \cdot b - (-1)^{|a|} a \cdot \Delta_{CM}(b))$$
$$+ d_1 H(a;b) + H(d_1 a; b) + (-1)^{|a|} H(a; d_1 b).$$

sur la construction cobar $(\Omega A, d_0 + d_1)$. Les opérateurs impliqués dans l'équation ci-dessus commutent avec la différentielle d_0. En conséquence, on peut remplacer d_1 par d_Ω dans cette équation. □

3.3 Critère d'involutivité de l'antipode sur la construction cobar d'une G-cogèbre homotopique

Dans cette section, on considère une G-cogèbre homotopique $(C, d, \nabla, E^{k,1})$ de co-opérations

$$E^{k,1} : \overline{C} \to \overline{C} \otimes \overline{C}^{\otimes k},$$

pour $k \ge 1$. L'antipode (dont l'existence est assurée par la Proposition 1.1.23) sur la construction cobar ΩC s'exprime en fonction de ces co-opérations. Ceci nous permet de définir une famille de co-opérations $O_n : \overline{C} \to \overline{C}^{\otimes n}$, $n \ge 2$ qui en contrôlent l'involutivité.

Expression de l'antipode de la construction cobar sur une G-cogèbre homotopique

L'antipode

$$S : \Omega C \to \Omega C,$$

comme toute antipode, est un anti-morphisme d'algèbres, cf. iii) de la Proposition 1.1.22, c'est à dire ici, un morphisme d'algèbres de $(\Omega C, \mu_\Omega)$ vers $\Omega C_{(12)} := (\Omega C, \mu_{\Omega_{(12)}} := \mu_\Omega \tau)$. De plus, c'est également une application de complexes. Ainsi, elle correspond par le Lemme 1.2.2 à une cochaîne tordante $F \in \mathrm{Tw}(C, \Omega C_{(12)})$. Une telle cochaîne s'écrit comme la somme de ses composantes $F^i : \overline{C} \to \overline{C}^{\otimes i}$. On rappelle la notation $\overline{C} := s^{-1} C^+$.

Proposition 3.3.1. *L'antipode $S : \Omega C \to \Omega C$ a pour cochaîne tordante la cochaîne F de composantes :*

$$F^1 = -Id_{\overline{C}}; \tag{3.6}$$

$$F^n = \sum_{\substack{1 \le s \le n-1 \\ n_1 + \ldots + n_s = n-1 \\ n_i \ge 1}} (-1)^{s+1} (1^{\otimes n_1 + \ldots + n_{s-1}} \otimes E^{n_s,1}) \ldots (1^{\otimes n_1} \otimes E^{n_2,1}) E^{n_1,1}, \quad n \ge 2. \tag{3.7}$$

Démonstration. Il suffit de regarder les composantes de la relation[1] $\mu_\Omega(1 \otimes S)\nabla = \eta\epsilon$ sur un élément $c \in \overline{C}$. Pour $n = 1$,

$$\begin{aligned} \mu_\Omega(1 \otimes S)\nabla(c) &= \eta\epsilon(c) = 0 \\ = \mu_\Omega(1 \otimes S)(E^{0,1} + E^{1,0})(c) &= F^1(c) + c \end{aligned}$$

D'où $F^1(c) = -c$. On suppose vraie l'équation (3.7) pour $n \ge 1$. La $(n+1)$-ième composante de $S(c) = c - \mu_\Omega(1 \otimes S)\overline{\nabla}(c)$ est :

$$F^{n+1}(c) = (n+1)\text{-ième composante de}\Big(-\mu_\Omega(1 \otimes S)(\sum_{i=1}^{n} E^{i,1})(c)\Big)$$

$$F^{n+1}(c) = -\mu_\Omega(\sum_{i=1}^{n} (1 \otimes F^{n+1-i}) E^{i,1})(c)$$

$$F^{n+1}(c) = -\mu_\Omega(\sum_{i=1}^{n} (1^{\otimes i} \otimes \sum_{\substack{1 \le s \le n-i \\ n_1 + \ldots + n_s = n-i \\ n_j \ge 1}} (-1)^{s+1} (1^{\otimes n_1 + \ldots + n_{s-1}} \otimes E^{n_s,1}) \ldots (1^{\otimes n_1} \otimes E^{n_2,1}) E^{n_1,1}) E^{i,1})(c)$$

$$F^{n+1}(c) = -\mu_\Omega(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1 \le s \le n-i \\ n_1 + \ldots + n_s = n-i \\ n_j \ge 1}} (-1)^{s+1} (1^{\otimes i + n_1 + \ldots + n_{s-1}} \otimes E^{n_s,1}) \ldots (1^{\otimes i + n_1} \otimes E^{n_2,1})(1^{\otimes i} \otimes E^{n_1,1}) E^{i,1})(c)$$

$$F^{n+1}(c) = -\mu_\Omega(\sum_{\substack{1 \le s' \le n \\ n_0 + n_1 + \ldots + n_{s'} = n \\ n_j \ge 1}} (-1)^{s'} (1^{\otimes n_0 + n_1 + \ldots + n_{s'-1}} \otimes E^{n_{s'},1}) \ldots (1^{\otimes n_0 + n_1} \otimes E^{n_2,1})(1^{\otimes n_0} \otimes E^{n_1,1}) E^{n_0,1})(c).$$

□

Les trois premiers termes sont : $F^1 = -Id_{\overline{C}}$, $F^2 = E^{1,1}$ et $F^3 = -(1 \otimes E^{1,1})E^{1,1} + E^{2,1}$.

Critère d'involubilité de l'antipode de la construction cobar sur une G-cogèbre homotopique

Étudions de plus près l'opération $S^2 - Id$ qui va nous donner les obstructions O_n.
On regarde sa restriction sur $\overline{C}$. Sa première composante est zéro, puisque $F_1 \circ F_1 = -Id \circ -Id = Id$. Pour $n \ge 2$, la n-ième composante de $S^2 - Id$ restreinte à $\overline{C}$ est la n-ième composante de S^2 ;

[1] On peut également considérer $\mu_\Omega(S \otimes 1)\nabla = \eta\epsilon$. Ceci donne des F^n équivalents mais d'expression plus compliquée due à l'apparition de permutations. Par exemple $F^3 = -(E^{1,1} \otimes 1)E^{1,1} - (\tau \otimes 1)E^{2,1}$.

elle est donnée par :

$$O_n := \sum_{s=1}^{n} \sum_{n_1+\ldots+n_s=n} \mu^{(s)}_{\Omega_{(12)}} (F^{n_1} \otimes \ldots \otimes F^{n_s}) F^s. \tag{3.8}$$

Les termes $(F^{n_1} \otimes \ldots \otimes F^{n_s})F^s$ arrivent dans $\overline{C}^{\otimes n_1} \otimes \overline{C}^{\otimes n_2} \otimes \cdots \otimes \overline{C}^{\otimes n_s}$ et le produit s-itéré $\mu^{(s)}_{\Omega_{(12)}}$ permute ces s blocs comme la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s-1 & s \\ s & s-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{S}_s$.
Explicitons les deux premiers termes :

$$O_2 = F^2 - \tau F^2 = E^{1,1} - \tau E^{1,1}$$

et

$$\begin{aligned} O_3 &= (1+\tau_3)F^3 + \tau^{2,1}(F^2 \otimes 1)F^2 + \tau^{1,2}(1 \otimes F^2)F^2 \\ &= (\tau^{1,2} - 1 - \tau_3)(1 \otimes E^{1,1})E^{1,1} + \tau^{2,1}(E^{1,1} \otimes 1)E^{1,1} + (1+\tau_3)E^{2,1}, \end{aligned}$$

où les permutations sont $\tau^{1,2}(a \otimes b \otimes c) = \pm b \otimes c \otimes a$, $\tau^{2,1}(a \otimes b \otimes c) = \pm c \otimes a \otimes b$ et $\tau_3(a \otimes b \otimes c) = \pm c \otimes b \otimes a$; les signes étant déterminés par la règle de Koszul.
On a alors,

Proposition 3.3.2. *Soit $(C, d, \nabla_C, E^{k,1})$ une G-cogèbre homotopique.*

1. *La construction cobar ΩC est une dg-algèbre de Hopf involutive si et seulement si toutes les obstructions $O_n : \overline{C} \to \overline{C}^{\otimes n}$ définies en (3.8) pour $n \geq 2$, sont nulles.*

2. *Supposons que C est 2-connexe. Si toutes les obstructions $O_n : \overline{C} \to \overline{C}^{\otimes n}$ sont nulles alors la double construction cobar $\Omega^2 C$ est une BV-algèbre homotopique d'opérateur de BV, l'opérateur de Connes-Moscovici défini en (3.3).*

Donnons un énoncé plus précis du second point.

Soit M un dg-espace vectoriel et soit $M_{\leq n}$ le sous-espace vectoriel des éléments $m \in M$ de degré $|m| \leq n$. La structure de G-cogèbre homotopique sur une cogèbre connexe C préserve la filtration $C_{\leq n}$. En effet, le degré de la co-opération $E^{k,1} : \overline{C} \to \overline{C}^{\otimes k} \otimes \overline{C}$ est 0. Alors,

Proposition 3.3.3. *Soit $(C, d, \nabla_C, E^{k,1})$ une G-cogèbre homotopique i-connexe, $i \geq 2$. S'il existe un entier n tel que $O_k = 0$ pour $ki \leq n-1$, alors $\Omega^2(C_{\leq n})$ est une BV-algèbre homotopique.*

Démonstration. Le degré de $O_k : \overline{C} \to \overline{C}^{\otimes k}$ est 0 donc celui de $O_k^+ : C^+ \to (C^+)^{\otimes k}$ est $k-1$. Alors sur $\overline{C}_{\leq n-1} = (s^{-1}\, C^+_{\leq n})$ les seules co-opérations $O_k : \overline{C}_{\leq n-1} \to (\overline{C}_{\leq n-1})^{\otimes k}$ éventuellement non nulles, sont celles avec $ki \leq n-1$. □

Remarque 3.3.4. Les deux propositions précédentes s'étendent facilement aux cogèbres de Hirsch : les co-opérations définies en (3.8) s'expriment de la même manière en termes de F_n ; les termes F_n relatif à l'antipode sont plus complexes, et en un sens, plus symétriques puisqu'ils sont composés de termes $E^{i,j}$ où $j \geq 1$. On restreint cependant notre étude aux G-cogèbres homotopiques, l'objectif étant d'appliquer ces résultats au complexe de chaînes d'un ensemble simplicial qui est une G-cogèbre homotopique.

Remarque 3.3.5. Pour une cogèbre de Hirsch $(C, E^{i,j})$ la condition de cocommutativité du coproduit sur ΩC est $E^{i,j} = \tau E^{j,i}$ pour tout (i, j). En accord avec la Proposition 1.1.22 on voit que la condition d'involutivité de l'antipode est plus faible que celle de cocommutativité du coproduit. Quand la cogèbre de Hirsch est une G-cogèbre homotopique, la cocommutativité du coproduit signifie que la structure de G-cogèbre homotopique est quasiment triviale : $E^{1,1} = \tau E^{1,1}$ et $E^{k,1} = 0$ pour $k \geq 2$.

II

Applications topologiques

4

Sur la double construction cobar d'un ensemble simplicial

Ce chapitre est découpé en trois sections.
La première section est consacrée à la mise en place des outils simpliciaux. Dans la deuxième, on explicite le coproduit de Baues en termes de co-opérations définissant une structure de G-cogèbre homotopique sur le complexe de chaînes d'un ensemble simplicial X.
La troisième section est dévouée à l'étude des obstructions définies dans le chapitre précédent, dans le cas d'une suspension et d'une double suspension simpliciale. Lorsque l'ensemble simplicial X est 0-réduit nous établissons que les co-opérations de la structure de G-cogèbre homotopique $C_*(\Sigma X)$ (une fois 1-réduite) sont toutes nulles à l'exception de $E_{1,0} = id = E_{0,1}$ et $E_{1,1}$. Ceci nous permet de démontrer que si X est un ensemble simplicial 0-réduit, alors les obstructions à l'involutivité de l'antipode sur $\Omega C_*(\Sigma^2 X)$ sont toutes nulles. (Par suite $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ est une BV-algèbre homotopique.) Nous établissons également un théorème de formalité, obtenant comme application un quasi-isomorphisme de BV-algèbre homotopiques entre $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ et $\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$.

4.1 Ensembles simpliciaux, suspensions

On rappelle ici les principales propriétés des objets simpliciaux et introduisons quelques notations. On suit la référence [May92] à laquelle on renvoi pour plus de détail ou compléments.

La catégorie simpliciale

On définit la catégorie simpliciale Δ^{op} comme suit. Les objets sont les ensembles $\overline{n} = \{0, \cdots, n\}$ indexés par les entiers $n \geq 0$. Les morphismes sont les applications croissantes : $\phi : \overline{n} \to \overline{m}$, $\phi(i) \leq \phi(j)$ si $i < j$. On définit les morphismes de cofaces et de codégénéréscences :

$$\delta_i : \overline{n-1} \to \overline{n}$$

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i; \\ j+1 & \text{si } j \geq i. \end{cases}$$

$$\varsigma_i : \overline{n+1} \to \overline{n}$$
$$\varsigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i; \\ j-1 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Toute application $\phi : \overline{n} \to \overline{m}$ différente de l'identité se factorise de manière unique comme suit. Soient $i_1, ..., i_s$ les éléments de $\overline{m} \setminus \phi(\overline{n})$ ordonnés dans l'ordre décroissant et soient $j_1, ..., j_r$ les éléments de $\overline{n}$ ordonnés dans l'ordre croissant tels que $\phi(j_s) = \phi(j_s+1)$. Alors, $\phi = \delta_{i_1}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_s}\varsigma_{j_1}\varsigma_{j_2}\cdots\varsigma_{j_r}$, $m = n - r + s$.

La catégorie des ensembles simpliciaux

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet simplicial dans $\mathcal{C}$ est un foncteur (contravariant)

$$F : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}.$$

Les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

On appelle n-simplexes les éléments de $F(\overline{n})$. Les morphismes $d_i = F(\delta_i)$ et $s_i = F(\varsigma_i)$ sont appelés les opérateurs de faces et de dégénérescences respectivement. Ils vérifient les relations simpliciales usuelles, cf. [May92, (i)-(iii) de la Définition 1.1].

Un ensemble simplicial X est un foncteur $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to Set$, vers la catégorie des ensemble. On note par X_n l'ensemble $X(\overline{n})$.

Définition 4.1.1. Un ensemble simplicial X est dit r-réduit si $X_n = *$, pour $0 \leq n \leq r$.

Complexes simpliciaux

Soit $F : Set \to k-mod$ le foncteur de la catégorie des ensembles vers la catégorie des k-espaces vectoriels, qui à un ensemble X associe le k-espace vectoriel libre $F(X)$ engendré par X. Si $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to Set$ est un ensemble simplicial alors la composée $F(X) : \Delta^{\mathrm{op}} \to k-mod$ est un k-espace vectoriel simplicial. On pose

$$d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i,$$

sur le k-espace vectoriel $F(X)_n = F(X_n)$. Ceci fait de $F(X)$ un complexe de chaînes.

Le complexe de chaînes normalisées $C_*(X)$ est défini comme le quotient $C_n(X) = F_n(X)/D_n(X)$ où $D_n(X)$ est le k-espace vectoriel libre engendré par l'ensemble des éléments dégénérés $\cup_{i=0}^{n-1} s_i(X_{n-1})$, cf.[May92, page 95]. La différentielle

$$d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i,$$

passe au quotient, $d(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$.

L'homologie d'un ensemble simplicial X à coefficients dans k, $H_*(X;k)$ est l'homologie du complexe de chaînes normalisées $(C_*(X), d)$.

Coproduit d'Alexander-Whitney

Soient X un ensemble simplicial et $\nabla_{\mathrm{top}} : X \to X \times X$ la diagonale simpliciale. On note ∇_{AW} la composée

$$C_*(X) \xrightarrow{\nabla_{\text{top}}} C_*(X \times X) \xrightarrow{\text{AW}} C_*(X) \otimes C_*(X)$$

où, pour $x \times y \in (X \times X)_n$, AW est défini par :

$$AW(x \times y) = \sum_{i=0}^{n} d_{i+1} \cdots d_n(x) \otimes d_0^i(y).$$

Soit $\epsilon : C_*(X) \to k$ définie par $\epsilon(\sigma) = 1$ si $\sigma \in X_0$ et $\epsilon(\sigma) = 0$ si $\sigma \in X_n$ pour $n > 0$.

Proposition 4.1.2. *$(C_*(X), d, \nabla_{AW}, \epsilon)$ est une dg-cogèbre, cocommutative à homotopie près.*

La preuve de l'affirmation d'être une dg-cogèbre est faite dans [May92, p.133-137]. La cocommutativité à homotopie près résulte par exemple d'une action de l'opérade des surjections, voir [MS03, BF04], fournissant en particulier l'homotopie à cette cocommutativité. Nous expliciterons l'homotopie comme co-opération issue du coproduit de Baues sur la construction cobar d'un ensemble simplicial, $\Omega C_*(X)$.

Suspension simpliciale

Définition 4.1.3. [May92, Définition 27.6 p.124] Soit X un ensemble simplicial tel que $X_0 = *$. La suspension simpliciale ΣX de X est définie comme suit : $(\Sigma X)_0 = a_0$ et $(\Sigma X)_n = \{(i, x) \in \mathbb{N}^{\geq 1} \times X_{n-i}\} / \Big((i, s_0^n(*)) = s_0^{n+i}(a_0) =: a_{n+i}\Big)$. Les opérateurs de faces et de dégénérescences sont engendrés par :

- $d_0(1, x) = a_n$ pour tout $x \in X_n$;
- $d_1(1, x) = a_0$ pour tout $x \in X_0$;
- $d_{i+1}(1, x) = (1, d_i(x))$ pour tout $x \in X_n, n > 0$;
- $s_0(i, x) = (i + 1, x)$;
- $s_{i+1}(1, x) = (1, s_i(x))$.

Les opérateurs $s_i(j, x)$ pour $i \geq 1, j \geq 2$ et $d_i(j, x)$ pour $i \geq 0, j \geq 2$ sont déterminés par les opérations ci-dessus et le fait que ΣX est un ensemble simplicial.

Proposition 4.1.4. *[May92, Lemme 27.7 p.125] La suspension (réduite) de la réalisation géométrique de X est canoniquement homéomorphe à la réalisation géométrique de ΣX.*

4.2 Coproduit de Baues

Dans cette partie nous détaillons le coproduit de Baues sur la construction cobar d'un ensemble simplicial et explicitons les co-opérations résultantes sur le complexe de chaînes de l'ensemble simplicial en question.

Le coproduit sur la construction cobar d'un ensemble simplicial X fournit par H-J. Baues munit cette construction d'une structure de dg-bigèbre compatible avec la structure de dg-bigèbre des chaîne cubiques de l'espace des lacets pointés $\Omega|X|$. Plus précisément, il a obtenu (cf. [Bau98, Théorème 3.5]) un morphisme de dg-bigèbres injectif de la construction cobar $\Omega C_*(X)$ dans les chaînes cubiques de la *construction cobar géométrique*. La construction cobar géométrique est un foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux (1-réduits) vers la catégorie des monoïdes topologiques (connexes). L'image d'un ensemble simplicial X par ce foncteur est homotopiquement équivalente à $\Omega|X|$, [Bau80]. Utilisant ce coproduit, Baues a obtenu un isomorphisme d'algèbres $H_*(\Omega^2 C_*(X)) \cong H_*(\Omega^2|X|)$.

Soit X un ensemble simplicial 1-réduit, c'est à dire $X_0 = X_1 = *$. On rappelle que $C_*(X)$ est le complexe des chaînes normalisées. *La construction cobar de* X, $\Omega C_*(X)$, est la construction cobar de la dg-cogèbre $(C_*(X), \nabla_{AW})$ munie du coproduit d'Alexander-Whitney. Nous rappelons les conventions de [Bau81, Bau98]. Pour $\sigma_i \in X$, $[\sigma_1|\sigma_2|...|\sigma_n]$ est le tenseur $s^{-1}\sigma_{i_1} \otimes s^{-1}\sigma_{i_2} \otimes ... \otimes s^{-1}\sigma_{i_r}$ où les indices i_j sont tels que $\sigma_{i_j} \in X_{n_{i_j}}$ avec $n_{i_j} \geq 2$. Pour un sous-ensemble $b = \{b_0 < b_1 < ... < b_r\} \subset \{0, 1, ..., n\}$ la notation i_b désigne l'unique fonction

$$i_b : \{0, 1, ..., r\} \to \{0, 1, ..., n\}$$

injective préservant l'ordre, telle que $\mathrm{Im}(i_b) = b$. Soit $\sigma \in X_n$ et $0 \leq b_0 < b_1 \leq n$. La notation $\sigma(b_0, ..., b_1)$ réfère à l'élément $i_b^*\sigma \in X_{b_1 - b_0}$ où $b = \{b_0, b_0 + 1, ..., b_1 - 1, b_1\}$. Soit maintenant $b \subset \{1, ..., n-1\}$, l'élément $\sigma(0, b, n)$ désigne $i_{b'}^*\sigma$ où $b' = \{0\} \cup b \cup \{n\}$.
Le coproduit de Baues sur la construction cobar, noté ∇_0, est défini sur les éléments $\sigma \in X_n$, $n \geq 2$ par :

$$\begin{aligned} &\nabla_0 : \Omega C_*(X) \to \Omega C_*(X) \otimes \Omega C_*(X) \\ &\quad s^{-1}\sigma = [\sigma] \mapsto \sum_{\substack{b=\{b_1<b_2<...<b_r\} \\ b\subset\{1,...,n-1\}}} (-1)^{\zeta}[\sigma(0, ..., b_1)|\sigma(b_1, ..., b_2)|...|\sigma(b_r, ..., n)] \otimes [\sigma(0, b, n)] \end{aligned} \tag{4.1}$$

où

$$\zeta = r|\sigma(0, .., b_1)| + \sum_{i=2}^{r}(r + 1 - i)|\sigma(b_{i-1}, ..., b_i)| - r(r + 1)/2,$$

il est étendu comme morphisme d'algèbre sur la construction cobar.
Baues a également montré que ce coproduit est cocommutatif à homotopie près, d'homotopie ∇_1 définie sur les générateurs par :

$$\begin{aligned} &\nabla_1 : \Omega C_*(X) \to \Omega C_*(X) \otimes \Omega C_*(X) \\ &\quad s^{-1}\sigma \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{b\subset\{1,...,i-1\} \\ c\subset\{i+1,...,n-1\}}} (-1)^{\zeta'(r,s)}[\sigma(0, b, i, c_1)|\sigma(c_1, c_2)|...|\sigma(c_s, n)] \otimes [\sigma(0, b_1)|...|\sigma(b_r, i, c, n)] \end{aligned} \tag{4.2}$$

où, $b = \{b_1 < b_2 < ... < b_r\}$, $c = \{c_1 < c_2 < ... < c_s\}$ et

$$\zeta'(r, s) = \zeta(r) + \zeta(s) + (\#(b) + i)(\#(c) + n).$$

Celle-ci est étendu sur la construction cobar comme *homotopie-dérivation* (voir Définition 6.0.3) entre $\tau\nabla_0$ et ∇_0.

Proposition 4.2.1. *Les co-opérations* $E^{k,1} : \overline{C}_*(X) \to \overline{C}_*(X)^{\otimes k} \otimes \overline{C}_*(X)$ *du coproduit de Baues sont,* *pour chaque $k \geq 1$,*

$$E^{k,1}(\mathrm{s}^{-1}\sigma) = \sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{2k} \leq n} \pm\, \mathrm{s}^{-1}\sigma(j_1, \ldots, j_2) \otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(j_3, \ldots, j_4) \otimes \cdots \otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(j_{2k-1}, \ldots j_{2k}) \otimes \\ \mathrm{s}^{-1}\sigma(0, \ldots, j_1, j_2, \ldots, j_3, j_4, \cdots, j_{2k-1}, j_{2k}, \ldots, n). \quad (4.3)$$

Démonstration. Fixons un n-simplexe σ, le coproduit de Baues est une somme sur chaque sous-ensemble $b = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_r\} \subset \{1, \ldots, n-1\}$. Pour un tel sous-ensemble b, soit $b_0 := 0$, $b_{r+1} := n$ et $\beta_l \in b \cup \emptyset$ définis comme suit. Pour $l = 1$,

$$\beta_1 := \min_{1 \leq i \leq r+1} \{b_i \mid b_i - b_{i-1} \geq 2\},$$

et soit η_1 l'indice tel que $b_{\eta_1} = \beta_1$; pour $l \geq 2$,

$$\beta_l := \min_{\eta_{l-1}+1 \leq i \leq r+1} \{b_i \mid b_i - b_{i-1} \geq 2\}$$

où η_l est l'indice tel que $b_{\eta_l} = \beta_l$. De plus, on pose $\alpha_l := b_{\eta_l - 1}$. Soit k l'entier tel que $1 \leq l \leq k$. Explicitement, k est donné par :

$$k = \#\{1 \leq i \leq r+1 \mid b_i - b_{i-1} \geq 2\}.$$

Ainsi, le coproduit ∇_0 se récrit comme

$$\nabla_0([\sigma]) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq n \\ \beta_i - \alpha_i \geq 2,\ 1 \leq i \leq k}} \pm\, \mathrm{s}^{-1}\sigma(\alpha_1, \ldots, \beta_1) \otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(\alpha_2, \ldots, \beta_2) \otimes \cdots \\ \cdots \otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(\alpha_k, \ldots, \beta_k) \otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(0, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_k, \ldots, n).$$

On obtient ainsi,

$$E^{k,1}(\mathrm{s}^{-1}\sigma) = \sum \pm\, \mathrm{s}^{-1}\sigma(\alpha_1, \ldots, \beta_1) \otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(\alpha_2, \ldots, \beta_2) \otimes \cdot \otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(\alpha_k, \ldots, \beta_k) \otimes \\ \mathrm{s}^{-1}\sigma(0, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_k, \ldots, n).$$

Le résultat s'obtient en posant $j_{2l-1} = \alpha_l$ et $j_{2l} = \beta_l$. Puisque X est 1-réduit, les éléments $\sigma(j_l, \ldots, j_{l+1})$ avec $j_{l+1} - j_l = 1$ appartiennent à $X_1 = * = s_0(*)$ et sont dégénérés. □

Remarque 4.2.2. Ces co-opérations sont, au signe près, les co-opérations

$$\tau_{1,k}\mathrm{AW}(1213141 \cdots 1k+11) : \overline{C}_*(X) \to \overline{C}_*(X)^{\otimes k} \otimes \overline{C}_*(X)$$

définies dans [BF04] (voir aussi [MS03]), où ici $\tau_{1,k}$ permute les facteurs suivant la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 \\ 2 & 3 & \cdots & k+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coproduit de Baues correspond à l'action de la seconde filtration de l'opérade des surjections, cf. [BF04]. En outre, l'homotopie ∇_1 s'interprète également en terme d'opérade des surjections et plus précisément en terme de la troisième filtration de cette opérade. De surcroit, cette homotopie ∇_1 est elle-même cocommutative à une homotopie ∇_2 et ainsi de suite. Cette structure $\{\nabla_i\}_{i \geq 0}$ est connue sous le nom de dg-algèbre de Hopf avec coproduits de Steenrod.

Elle correspond à une structure de G-cogèbre homotopique étendue sur le complexe $C_*(X)$, voir [Kad03].

Remarque 4.2.3. D'autres modèles pour les espaces de lacets pointés existent. En particulier, T. Kadeishvili et Saneblidze ont construit dans [KS05] un modèle des lacets pointés qui est un ensemble cubique dont le complexe de chaînes est canoniquement isomorphe à la construction cobar. La diagonale de Serre [Ser51] pour les ensembles cubiques fait du complexe de chaînes de ce modèle une dg-algèbre de Hopf ; et ainsi, munit la construction cobar d'une structure de dg-algèbre de Hopf via l'isomorphisme canonique. Cette structure coïncide avec celle de Baues [Bau98]. Ceci donne une interprétation de la diagonale de Serre sur cet ensemble cubique en terme de G-cogèbre homotopique $C_*(X)$. Par la suite, ils ont développé suivant le même schéma une construction cobar d'un ensemble cubique. Ils obtiennent un modèle des lacets pointés doubles sur $|X|$ qui est un ensemble permutahédral, cf. [KS02]. Le complexe de chaînes de ce modèle est canoniquement isomorphe à la double construction cobar de X. En tant que complexe de chaînes d'un ensemble cubique, la première construction cobar bénéficie d'une structure de G-cogèbre homotopique faible c'est à dire non nécessairement coassociative. Le coproduit résultant sur la double construction cobar n'est pas coassociatif. En revanche, Saneblidze et Umble [SU02] ont montré qu'il provient d'une diagonale sur les ensembles permutahédraux et s'avère être coassociatif à homotopie près, et plus précisément, A_∞-coassociatif. Il est conjecturé [SU11, Conjecture 1 à la fin de l'article] un quasi-isomorphisme d'A_∞-bigèbres entre la double construction cobar et les chaînes permutahédrales de l'espace des doubles lacets pointés.

4.3 Structure de G-cogèbre sur le complexe d'un ensemble simplicial ; formalité

On étudie la structure de G-cogèbre homotopique issue du coproduit de Baues sur $C_*(Y)$ dans les cas où Y est une simple et une double suspension simpliciale. Ceci afin d'étudier les co-opérations O_n définies dans la Section 3.3. Les obstructions données par les O_n se réduisent à la seule co-opération O_2 dans le cas d'une simple suspension. En outre, la trivialité de la structure de G-cogèbre homotopique sur le complexe d'une double suspension conduit à l'annulation des obstructions. De plus, les BV-algèbres homotopiques $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ et $\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$ sont quasi-isomorphe. Nous utiliserons ce résultat dans la prochaine section. Nous montrerons que la structure de G-algèbre homotopique sous-jacente de $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ relève la structure d'algèbre de Gerstenhaber restreinte de $H_*(\Omega^2|\Sigma^2 X|)$ à coefficients dans $\mathbb{F}_2$, démontrée par F. Cohen.

4.3.1 Simple suspension, obstruction

Soit ΣX une suspension simpliciale au sens de la définition 4.1.3. Un élément non-dégénéré $\sigma \in (\Sigma X)_{n+1}$, s'écrit alors sous la forme $\sigma = (1, x)$ pour un $x \in X_n$. De plus, la 0-face $d_0(1, x)$ d'un tel élément vaut a_n et est alors dégénérée. En conséquence, le coproduit d'Alexander-Whitney du complexe $C_*(\Sigma X)$ est primitif.

Proposition 4.3.1. *[HPS07, Lemme 3.1] La dg-cogèbre $(C_*(\Sigma X), \nabla_{AW})$ des chaînes d'une suspension simpliciale est primitive, i.e. $\overline{\nabla}_{AW} = 0$.*

Démonstration. Les chaînes étant normalisées, il suffit d'évaluer le coproduit sur les éléments de type $(1,x)$ pour un $x \in X_n$. On obtient,

$$\begin{aligned}\nabla_{AW}((1,x)) &= \sum_{i=0}^{n+1} d_{i+1}\cdots d_n(1,x)\otimes d_0^i(1,x)\\ &= (1,x)\otimes a_0 + a_0\otimes(1,x).\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.3.2. *[HPS07, Corollaire 3.2] La différentielle sur la construction cobar $\Omega C_*(\Sigma X)$ est linéaire.*

Démonstration. La partie quadratique de la différentielle est l'unique dérivation induite par le coproduit réduit de $C_*(\Sigma X)$ qui est nul par la Proposition 4.3.1. □

Il peut sembler naturel de définir le *shuffle*-coproduit (primitif sur les générateurs) comme coproduit sur la construction cobar $\Omega C_*(\Sigma X)$. Ce dernier munit la construction cobar d'une structure de dg-algèbre de Hopf cocommutative, donc involutive. Ainsi, la Proposition 3.2.1 s'applique, et l'on obtient une structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar $\Omega^2 C_*(\Sigma X)$ pour X un ensemble simplicial 1-réduit. Cependant, ce coproduit ne correspond pas au coproduit de Baues défini en Section 4.2 qui fait de la construction cobar un modèle de l'espace des lacets en tant que dg-bigèbre. La différence apparait dans la structure de G-cogèbre homotopique sur $C_*(\Sigma X)$. En effet, le *shuffle*-coproduit correspond à une structure de G-cogèbre homotopique triviale sur $C_*(\Sigma X)$, i.e. $E^{1,k} = 0$ pour tout $k \geq 1$. En revanche, bien que le coproduit d'Alexander-Whitney soit cocommutatif, la co-opération $E^{1,1}$, qui est alors une application de chaînes, n'est pas nécessairement triviale. En fait, nous avons,

Proposition 4.3.3. *La structure de G-cogèbre homotopique $E^{k,1}$ sur $C_*(\Sigma X)$ correspondant au coproduit de Baues, est :*

$$E^{1,1}(\mathrm{s}^{-1}\sigma) = \sum_{1<l<n} \pm\,\mathrm{s}^{-1}\sigma(0,...,l)\otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(0,l,l+1,...,n);$$

$$E^{k,1} = 0 \ \textit{pour}\ k\geq 2.$$

Démonstration. Pour un élément non-dégénéré $\sigma \in (\Sigma X)_n$, l'élément $d_0\sigma = \sigma(1,...,n)$ est dégénéré. En conséquence, la co-opération

$$E^{1,1}(\mathrm{s}^{-1}\sigma) = \sum_{k<l} \pm\,\mathrm{s}^{-1}\sigma(k,...,l)\otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(0,...,k,l,l+1,...,n)$$

est réduite à

$$E^{1,1}(\mathrm{s}^{-1}\sigma) = \sum_{1<l<n} \pm\,\mathrm{s}^{-1}\sigma(0,...,l)\otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(0,l,l+1,...,n).$$

Les co-opérations supérieures $E^{k,1}$ pour $k\geq 2$,

$$\begin{aligned}E^{k,1}(\mathrm{s}^{-1}\sigma) = \sum_{0\leq j_1<j_2<...<j_{2k}\leq n} &\pm\,\mathrm{s}^{-1}\sigma(j_1,...,j_2)\otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(j_3,...,j_4)\otimes\cdots\otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(j_{2k-1},...j_{2k})\otimes\\ &\mathrm{s}^{-1}\sigma(0,...,j_1,j_2,...,j_3,j_4,\cdots,j_{2k-1},j_{2k},...,n),\end{aligned}$$

sont identiquement nulles. En effet, pour $l\geq 3$ les termes $\sigma(j_l,...,j_{l+1})$ sont dans l'image de d_0, donc dégénérés. □

La trivialité des co-opérations supérieures $E^{k,1}$ pour $k\geq 2$ n'implique pas l'annulation des obstructions supérieures O_n car la co-opération $E^{1,1}$ apparait dans tous les O_n. Cependant, la famille des O_n peut être réduite à O_2 dans le sens suivant,

Proposition 4.3.4. *Soit* $(C, d, \nabla_C, E^{k,1})$ *une G-cogèbre homotopique avec* $E^{k,1} = 0$ *pour* $k \geq 2$*. Si* $O_2 = E^{1,1} - \tau E^{1,1}$ *est identiquement nulle, alors* O_n *aussi, pour* $n \geq 2$*.*

Démonstration. La coassociativité du coproduit $\nabla : \Omega C \to \Omega C \otimes \Omega C$ donne en particulier l'équation suivante, cf. (2.21)

$$(1 \otimes E^{1,1})E^{1,1} - (E^{1,1} \otimes 1)E^{1,1} = ((1+\tau) \otimes 1)E^{2,1}.$$

En conséquence, l'annulation de la co-opération $E^{2,1}$ implique que $E^{1,1}$ est coassociative. Couplé avec l'annulation de O_2, ceci fait de $E^{1,1}$, une co-opération coassociative et cocommutative. Cette double propriété entraine l'annulation des O_n supérieures : dans l'équation (3.7) en Section 3.3, les termes F^i, pour $i \leq n$, qui interviennent dans O_n sont

$$F^n = (-1)^n (1^{\otimes n-2} \otimes E^{1,1}) \cdots (1 \otimes E^{1,1})E^{1,1}.$$

D'autre part, chaque terme $\mu^{(s)}_{\Omega_{(12)}}(F^{n_1} \otimes ... \otimes F^{n_s})F^s$ de la somme

$$O_n = \sum_{s=1}^{n} \sum_{n_1+...+n_s=n} \mu^{(s)}_{\Omega_{(12)}}(F^{n_1} \otimes ... \otimes F^{n_s})F^s$$

peut s'écrire comme $\pm\sigma \circ F^n$ où σ est une permutation (dépendante du terme considéré). En effet, le terme $(F^{n_1} \otimes ... \otimes F^{n_s})F^s$ est égal à $(-1)^{n_1+...+n_s+s+n}F^n$ par coassociativité. La permutation σ citée ci-dessus est celle qui apparaît dans le produit $\mu^{(s)}_{\Omega_{(12)}}$, elle dépend des entiers $n_1, ..., n_s$.

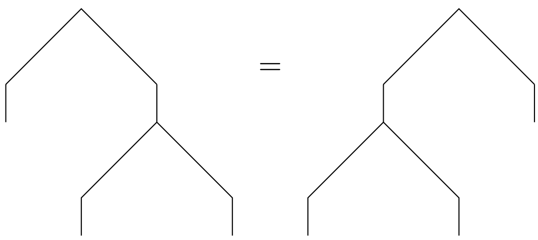


FIGURE 4.1 – Coassociativité de $E^{1,1}$.

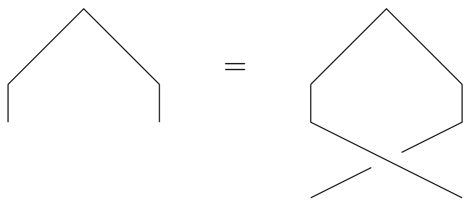


FIGURE 4.2 – Cocommutativité de $E^{1,1}$.

Utilisant les mouvements correspondants à la cocommutativité (Figure 4.2) et de nouveau ceux de la coassociativité de $E^{1,1}$, on peut supprimer la permutation σ pour obtenir $\pm F^n$. En effet, il suffit de "déplacer" une co-opération $E^{1,1}$, en utilisant la coassociativité, face aux transpositions élémentaires puis d'utiliser la cocommutativité.

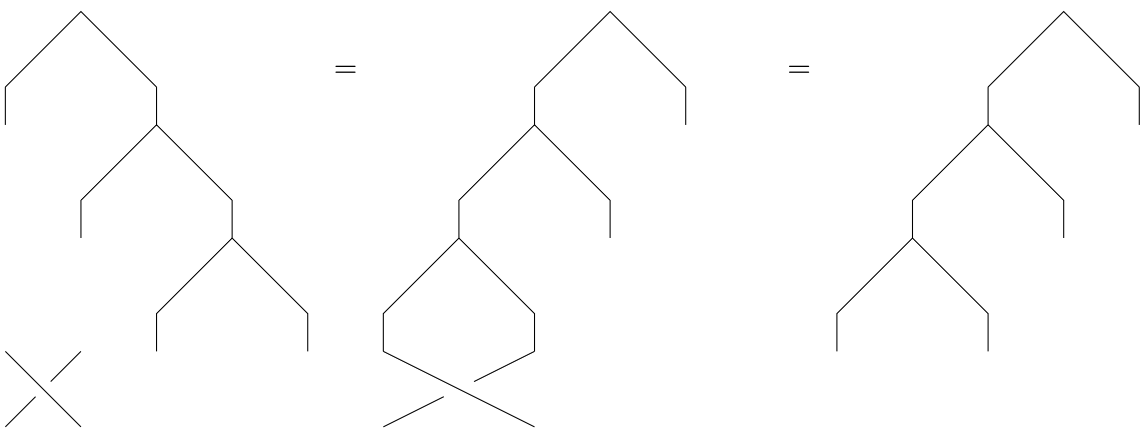


FIGURE 4.3 – Annulation d'une transposition élémentaire.

Un calcul direct montre que les termes positifs et négatifs sont en nombre égal : le signe de $(F^{n_1} \otimes ... \otimes F^{n_s})F^s$ est $(-1)^{n_1+...+n_s+s} = (-1)^{n+s}$ et le nombre de décompositions de n en une somme de s entiers ≥ 1 est $\binom{n-1}{s-1}$. □

Remarque 4.3.5. Ainsi, seule l'obstruction $O_2 : \overline{C}_*(\Sigma X) \to \overline{C}_*(\Sigma X) \otimes \overline{C}_*(\Sigma X)$ subsiste. Celle-ci mesure de défaut de cocommutativité de $E^{1,1}$. Le complexe $\overline{C}_*(\Sigma X)$ est muni d'une structure plus riche que celle de G-cogèbre homotopique. Par exemple, l'homotopie à la cocommutativité du coproduit ∇_0 fournit une homotopie à la cocommutativité de $E^{1,1}$. Ainsi, sur l'homologie $H_*(\Sigma X)$, le coproduit $H_*(\nabla_{AW})$ et la co-opération $H_*(E^{1,1})$ dont tous deux cocommutatifs et coassociatifs. Ceci confère à l'homologie $H_*(\Sigma X)$ une structure de G-cogèbre homotopique d'obstructions O_n nulles. Alors, la construction cobar $\Omega H_*(\Sigma X)$ est une algèbre de Hopf cocommutative. En résulte, par la Proposition 3.2.1, une structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar $\Omega^2 H_*(\Sigma X)$. Cependant, $\Omega^2 H_*(\Sigma X)$ n'est *a priori* pas quasi-isomorphe à $\Omega^2 C_*(\Sigma X)$. Détaillons ceci.
La formalité de la dg-cogèbre $C_*(\Sigma X)$ fournit une contraction avec conditions de jauges entre les complexes $(\Omega C_*(\Sigma X), d_0)$ et $(\Omega H_*(\Sigma X), 0)$ — il s'avère en outre, que les morphismes, à part l'homotopie contractante, sont des morphismes de dg-algèbres. Cette contraction permet de transférer la structure de dg-cogèbre (vue comme A_∞-cogèbre) de $\Omega C_*(\Sigma X)$ vers $\Omega H_*(\Sigma X)$, qui devient alors une A_∞-cogèbre. Cette dernière structure est minimale, $d = 0$, et le coproduit $\overline{\nabla} : \Omega H_*(\Sigma X) \to \Omega H_*(\Sigma X) \otimes \Omega H_*(\Sigma X)$ est coassociatif. Il correspond de plus, au coproduit défini par la structure de G-cogèbre homotopique $(H_*(\Sigma X), H_*(\nabla_{AW}), H_*(E^{1,1}))$. On obtient ainsi un quasi-isomorphisme de dg-algèbres $(\Omega^2 C_*(\Sigma X), d_\Omega) \to (\Omega^2 H_*(\Sigma X), \partial)$ où ∂ est la différentielle définie par la structure d'A_∞-cogèbre de $\Omega H_*(\Sigma X)$, qui n'est en généralement pas une dg-cogèbre.

4.3.2 Structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar d'une double suspension

Théorème 4.3.6. *Soit $\Sigma^2 X$ une double suspension. Alors :*

1. *la structure de G-cogèbre homotopique $C_*(\Sigma^2 X)$, définie par le coproduit de Baues, est triviale ;*

2. *la double construction cobar $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ est une BV-algèbre homotopique de BV-operator l'opérateur de Connes-Moscovici.*

Démonstration. On sait par la Proposition 4.3.3 que les co-opérations $E^{k,1}$ pour $k \geq 2$ sont triviales. En conséquence, pour montrer la première assertion il reste a montrer que $E^{1,1}$ est triviale. Ceci est une conséquence directe du fait que $d_1(1,(1,x)) = (1, d_0(1,x)) = (1, a_n) = s_{n+1}(1, a_0)$ est dégénéré. Ainsi, la dernière co-opération

$$E^{1,1}(\mathrm{s}^{-1}\sigma) = \sum_{1<l<n} \pm \mathrm{s}^{-1}\sigma(0,...,l) \otimes \mathrm{s}^{-1}\sigma(0,l,l+1,...,n)$$

devient triviale puisque $l > 1$.
La seconde assertion quant à elle découle de l'annulation des obstructions O_n : la Proposition 3.3.2 donne la structure annoncée de BV-algèbre homotopique sur $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$. □

On explicite à titre d'exemple, la structure de BV-algèbre homotopique obtenue sur $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$. On observe que le coproduit ∇_0 de (4.1) est le *shuffle*-coproduit ; on l'écrit comme

$$\nabla_0([a_1|...|a_n]) = \sum_{I_0 \cup I_1} \pm [a_{I_0}] \otimes [a_{I_1}]$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $I_0 \sqcup I_1$ de $I = \{1, ..., n\}$ avec $I_0 = \{i_1 < i_2 < ... < i_k\}$ et $I_1 = \{j_1 < j_2 < ... < j_{n-k}\}$. On note a_{I_0} l'élément $a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes ... \otimes a_{i_k}$ et $a_{I_0^{-1}}$ l'élément $a_{i_k} \otimes ... \otimes a_{i_2} \otimes a_{i_1}$; on fait de même pour a_{I_1}.

Explicitons maintenant l'opérateur de BV sur un 2 et un 3-tenseur. On note $\underline{a} = [a_1|a_2|...|a_k]$ un élément de $\Omega C_*(\Sigma^2 X)$ et $[\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n]$ un élément de $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$.
Ainsi, $[\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n]$ est l'élément $[[a_{1,1}|a_{1,2}|...|a_{1,k_1}], [a_{2,1}|a_{2,2}|...|a_{2,k_2}], ..., [a_{n,1}|a_{n,2}|...|a_{n,k_n}]]$.
L'opérateur de BV est alors,

$$\Delta_{CM}([\underline{a}, \underline{b}]) = \Delta_{CM}([[a_1|...|a_m], [b_1|...|b_n]]) = \pm[[a_m|...|a_1|b_1|...|b_n]] \pm [[b_n|...|b_1|a_1|...|a_m]].$$

$$\begin{aligned}\Delta_{CM}([[a_1|...|a_m], [b_1|...|b_n], [c_1|...|c_r]]) = & \sum_{I_0 \cup I_1} \pm[[a_{I_1^{-1}}|b_1|...|b_n], [a_{I_0^{-1}}|c_1|...|c_r]] \\ & + \sum_{I_0 \cup I_1} \pm[[b_{I_1^{-1}}|c_1|...|c_r], [b_{I_0^{-1}}|a_1|...|a_m]] \\ & + \sum_{I_0 \cup I_1} \pm[[c_{I_1^{-1}}|a_1|...|a_m], [c_{I_0^{-1}}|b_1|...|b_n]].\end{aligned}$$

Remarque 4.3.7. D'un point de vu topologique, considérons un CW-complexe X connexe (dénombrable) avec un sommet. Les modèles de James/Milgram $J_i(X)$ sont des H-espaces homotopiquement équivalent à $\Omega^i \Sigma^i X$, voir [Mil66, Théorème 5.2]. De plus, pour $i \geq 1$, le complexe de chaînes cellulaires $C_*(J_i(\Sigma X))$ est une dg-algèbre de Hopf cocommutative et primitivement engendrée et $C_*(J_{i+1}(X))$ est isomorphe à $\Omega C_*(J_i(\Sigma X))$, [Mil66, Théorèmes 6.1 et 6.2]. Alors, utilisant la Proposition 3.2.1 nous obtenons une structure de BV-algèbre homotopique sur $\Omega C_*(J_i(\Sigma X))$ qui est similaire à celle obtenue dans le contexte simplicial. De plus, il y a un quasi-isomorphisme de dg-algèbres

$$\Omega C_*(J_1(\Sigma X)) \longrightarrow C_*(J_2(X)) \xrightarrow{C_*(j_2)} C_*(\Omega^2 \Sigma^2 X).$$

La proposition suivante est une conséquence de la trivialité de la structure de G-cogèbre homotopique de $C_*(\Sigma^2 X)$.
Munissons $\Omega H_*(\Sigma^2 X)$ du *shuffle*-coproduit. Par la Proposition 3.2.1, $\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$ est munie d'une structure de BV-algèbre homotopique que l'on appelle *canonique*.

Théorème 4.3.8. *Soit k un corps. Soit C une G-cogèbre homotopique triviale (donc involutive) et dont tous les éléments de C^+ sont primitifs pour le coproduit. Alors, la double construction cobar $\Omega^2 C$ munie de la structure de Connes-Moscovici de la Proposition 3.2.1 est quasi-isomorphe, comme BV-algèbre homotopique, à la double construction cobar $\Omega^2 H_*(C)$ munie de la structure de BV-algèbre homotopique canonique.*

D'après le point 1 du Théorème 4.3.6 et la Proposition 4.3.1, les hypothèses du Théorème 4.3.8 ci-dessus sont vérifiées pour $C = C_*(\Sigma^2 X)$. Ce qui nous donne :

Proposition 4.3.9. *Soit k un corps. La double construction cobar $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ munie de la structure de BV-algèbre du Théorème 4.3.6 est quasi-isomorphe, comme BV-algèbre homotopique, à la double construction cobar $\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$ munie de la structure de BV-algèbre homotopique canonique.*

La démonstration de cette proposition s'appuie sur le théorème de transfert d'A_∞-cogèbres. Ce dernier permet de transférer la structure d'A_∞-cogèbre le long d'une contraction :

$$\begin{tikzcd} (C,d) \arrow[loop left, "\nu"] \arrow[r, bend left, "p"] & (H,d) \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

où, p et i sont des morphismes de complexes et ν une application linéaire tels que :

$$\begin{aligned} pi &= Id \\ ip - Id &= d\nu + \nu d \\ p\nu = \nu i &= \nu^2 = 0 \ \text{(Conditions de jauge).} \end{aligned}$$

Ce type de contraction existe toujours sur un corps lorsque (H, d) désigne l'homologie $(H(C, d), 0)$ de (C, d).

Théorème 4.3.10 (Théorème de transfert)**.** *[Gug82] Soient (C, d, ∇) une dg-cogèbre connexe telle que $C_1 = 0$ et (H, d) un dg-espace vectoriel. On les suppose reliés par une contraction comme ci-dessus. Alors, il existe sur H une structure d'A_∞-cogèbre (H, ∂_i), ainsi qu'un A_∞-quasi-isomorphisme*

$$f : (C, d, \nabla) \to (H, \partial_i).$$

Les ∂_i sont donnés par :

$$\begin{aligned} \partial_0 &= d_H \\ \partial_1 &= (p \otimes p)\nabla i \\ \partial_2 &= p^{\otimes 3}(\nabla\nu \otimes Id + Id \otimes \nabla\nu)\nabla i, \end{aligned}$$

et plus généralement, pour $i \geq 2$,

$$\partial_i = \sum_{\substack{0\leq k_{i-1}\leq i-1 \\ 0\leq k_{i-2}\leq i-2 \\ \cdots \\ 0\leq k_1 \leq 1}} \pm p^{\otimes i+1}(Id^{\otimes k_{i-1}} \otimes \nabla\nu \otimes Id^{\otimes i-1-k_{i-1}})(Id^{\otimes k} \otimes \nabla\nu \otimes Id^{\otimes i-1-k})\ldots$$
$$\ldots(\nabla\nu \otimes Id + Id \otimes \nabla\nu)\nabla i.$$

Le quasi-isomorphisme f équivaut à une cochaîne tordante $\tau : C \to \Omega H$ de composantes $\tau = \sum_{i\geq 0} \tau_i$ où $\tau_i : C \to H^{\otimes i+1}$ est :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= p \\ \tau_1 &= (p \otimes p)\nabla\nu \\ \tau_2 &= p^{\otimes 3}(\nabla\nu \otimes Id + Id \otimes \nabla\nu)\nabla\nu \end{aligned}$$

et plus généralement, pour $i \geq 2$,

$$\tau_i = \sum_{\substack{0\leq k_{i-1}\leq i-1 \\ 0\leq k_{i-2}\leq i-2 \\ \cdots \\ 0\leq k_1 \leq 1}} \pm p^{\otimes i+1}(Id^{\otimes k_{i-1}} \otimes \nabla\nu \otimes Id^{\otimes i-1-k_{i-1}})(Id^{\otimes k} \otimes \nabla\nu \otimes Id^{\otimes i-1-k})\ldots$$
$$\ldots(\nabla\nu \otimes Id + Id \otimes \nabla\nu)\nabla\nu.$$

Démonstration de la Proposition 4.3.9. Le complexe de chaînes C est formel comme dg-cogèbre. Plus précisément, sur un corps on dispose d'une contraction (cf. [Gug82]),

$$\begin{tikzcd} (C, d) \arrow[loop left, "\nu"] \arrow[r, bend left, "p"] & (H_*(C, d), 0) \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

où, p et i sont des morphismes de complexes et ν une application linéaire tels que :

$$pi = Id \tag{4.4}$$
$$ip - Id = d\nu + \nu d \tag{4.5}$$
$$p\nu = \nu i = \nu^2 = 0 \text{ (Conditions de jauge).} \tag{4.6}$$

Le théorème de transfert d'A_∞-cogèbre [Gug82] transfère la structure de dg-cogèbre (vue comme une A_∞-cogèbre) de C vers $H_*(C,d)$. Comme conséquence directe du fait que le coproduit sur C est primitif, la structure d'A_∞-cogèbre $(H_*(C,d),\delta_i)$ obtenue par transfert est réduite au seul coproduit

$$H(\nabla_C) : H_*(C,d) \to H_*(C,d) \otimes H_*(C,d),$$

également primitif. En effet, le théorème de transfert montre l'existence d'une différentielle et dérivation $\delta : \Omega H_*(C,d) \to \Omega H_*(C,d)$. Celle-ci s'écrit comme $\delta = \sum_{i\geq 1}\delta_i$ avec $\delta_i(H_*(C,d)) \subset (H_*(C,d))^{\otimes i+1}$. Notons H pour $H_*(C,d)$. Explicitement nous avons,

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= d_H = 0\\
\delta_1 &= (p\otimes p)\nabla_C i = \nabla_H\\
\delta_2 &= p^{\otimes 3}(\nabla_C\nu \otimes Id + Id\otimes \nabla_C \nu)\nabla_C i,
\end{aligned}$$

et plus généralement, pour $i \geq 2$,

$$\delta_i = \sum_{\substack{0\leq k_{i-1}\leq i-1\\ 0\leq k_{i-2}\leq i-2\\ \cdots\\ 0\leq k_1\leq 1}} \pm p^{\otimes i+1}(Id^{\otimes k_{i-1}}\otimes \nabla_C\nu\otimes Id^{\otimes i-1-k_{i-1}})(Id^{\otimes k}\otimes\nabla_C\nu\otimes Id^{\otimes i-1-k})...$$
$$...(\nabla_C\nu\otimes Id + Id\otimes\nabla_C\nu)\nabla_C i.$$

Dans notre cas, ∇_C est primitif et puisque ν satisfait les conditions de jauges, seul δ_1 n'est pas nul. De plus, la cochaîne tordante $\tau : C \to \Omega H$ donnée par le Théorème de transfert, de composantes $\tau = \sum_{i\geq 0}\tau_i$ où $\tau_i : C \to H^{\otimes i+1}$, est :

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= p\\
\tau_1 &= (p\otimes p)\nabla_C\nu\\
\tau_2 &= p^{\otimes 3}(\nabla_C\nu\otimes Id + Id\otimes\nabla_C\nu)\nabla_C\nu
\end{aligned}$$

et plus généralement, pour $i \geq 2$,

$$\tau_i = \sum_{\substack{0\leq k_{i-1}\leq i-1\\ 0\leq k_{i-2}\leq i-2\\ \cdots\\ 0\leq k_1\leq 1}} p^{\otimes i+1}(Id^{\otimes k_{i-1}}\otimes \nabla_C\nu\otimes Id^{\otimes i-1-k_{i-1}})(Id^{\otimes k}\otimes\nabla_C\nu\otimes Id^{\otimes i-1-k})...$$
$$...(\nabla_C\nu\otimes Id + Id\otimes\nabla_C\nu)\nabla_C\nu$$

Elle est ainsi réduite à

$$\tau_0 = p : C \to H.$$

Ainsi, p devient un morphisme d'A_∞-cogèbres i.e. Ωp est un morphisme de dg-algèbres de composantes $(\Omega p)_n$ sur $(\mathrm{s}^{-1}C)^{\otimes n}$ données par :

$$(\Omega p)_n = \mathrm{s}^{-1}p\,\mathrm{s}\otimes \mathrm{s}^{-1}p\,\mathrm{s}\otimes\cdots\otimes \mathrm{s}^{-1}p\,\mathrm{s}\,.$$

On obtient la contraction

$$\begin{tikzcd} (\Omega C, d) \arrow[loop left, "\Gamma"] \arrow[rr, bend left, "\Omega p"] & & (\Omega H, 0) \arrow[ll, bend left, "\Omega i"] \end{tikzcd}$$

où,

$$\Omega p \Omega i = Id \tag{4.7}$$

$$\Omega i \Omega p - Id = d\Gamma + \Gamma d \tag{4.8}$$

$$\Omega p \Gamma = \Gamma \Omega i = \Gamma^2 = 0 \text{ (Conditions de jauge)}, \tag{4.9}$$

et où Γ est définie par ses restrictions Γ_n à chaque composante $(s^{-1} C)^{\otimes n}$ par :

$$(\Gamma)_n = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_{s+1}=n-s \\ 1\leq s\leq n}} \pm Id^{\otimes k_1} \otimes (s^{-1} \nu\, s) \otimes Id^{\otimes k_2} \otimes (s^{-1} \overline{\partial}\nu\, s) \otimes Id^{\otimes k_3} \otimes (s^{-1} \overline{\partial}\nu\, s) \otimes Id^{\otimes k_4}$$
$$\otimes \cdots \otimes (s^{-1} \overline{\partial}\nu\, s) \otimes Id^{\otimes k_{s+1}},$$

où, $\overline{\partial}\nu := d\nu + \nu d$. De façon équivalente, en posant $\Gamma_1 := s^{-1} \nu\, s$, on a :

$$\Gamma_n = Id \otimes \Gamma_{n-1} \pm s^{-1} \nu\, s \otimes \overline{\partial}\Gamma_{n-1} \pm s^{-1} \nu\, s \otimes Id^{\otimes n-1},\ n \geq 2.$$

La structure de G-cogèbre homotopique de C munit ΩC d'une structure de dg-cogèbre ; on note $(\Omega C, d, \nabla_0)$ la dg-cogèbre obtenue. Cette structure de dg-cogèbre sur ΩC, vue comme structure d'A_∞-cogèbre, se transfère en une structure d'A_∞-cogèbre sur ΩH qui est alors A_∞-équivalente à la dg-cogèbre $(\Omega C, d, \nabla_0)$. Montrons que la structure d'A_∞-cogèbre $(\Omega H_*(\Sigma^2 X), \partial_i)$ obtenue est réduite au coproduit $H_*(\nabla_0)$. Les coproduits supérieurs

$$\partial_i : \Omega H \to (\Omega H)^{\otimes i+1},$$

sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \partial_0 &= 0 \\ \partial_1 &= (\Omega p \otimes \Omega p)\nabla_0 \Omega i = H_*(\nabla_0) \\ \partial_2 &= (\Omega p)^{\otimes 3}(\nabla_0\Gamma \otimes Id + Id \otimes \nabla_0\Gamma)\nabla_0\Omega i \end{aligned}$$

et plus généralement, pour $i \geq 2$,

$$\partial_i = \sum_{\substack{0\leq k_{i-1}\leq i-1 \\ 0\leq k_{i-2}\leq i-2 \\ \cdots \\ 0\leq k_1 \leq 1}} \pm(\Omega p)^{\otimes i+1}(Id^{\otimes k_{i-1}} \otimes \nabla_0\Gamma \otimes Id^{\otimes i-1-k_{i-1}})(Id^{\otimes k} \otimes \nabla_0\Gamma \otimes Id^{\otimes i-1-k})...$$
$$...(\nabla_0\Gamma \otimes Id + Id \otimes \nabla_0\Gamma)\nabla_0\Omega i.$$

Remarquons maintenant que chaque terme de Γ contient au moins une opération ν et que le coproduit ∇_0, qui est un *shuffle*-coproduit, consiste en une déconcaténation suivie de permutations. Ainsi, dans chaque terme de $\nabla_0\Gamma$, apparait au moins une fois l'opération ν. La post-composition avec Ωp annule alors chaque terme par la condition de jauge $p\nu = 0$.
En conclusion, seul le terme $H_*(\nabla_0)$ subsiste.

Le même argument montre que l'A_∞-quasi-isomorphisme entre les dg-cogèbres $(\Omega C, d, \nabla_0)$

et $(\Omega H, 0, H_*(\nabla_0))$ est strict. En effet, la cochaîne tordante

$$\tau : \Omega C \to \Omega^2 H,$$

de composantes $\tau_i : \Omega C \to (\Omega H)^{\otimes i+1}$ est :

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \Omega p \\
\tau_1 &= (\Omega p \otimes \Omega p)\nabla_0 \Gamma \\
\tau_2 &= (\Omega p)^{\otimes 3}(\nabla_0 \Gamma \otimes Id + Id \otimes \nabla_0 \Gamma)\nabla_0 \Gamma,
\end{aligned}$$

et plus généralement, pour $i \geq 2$,

$$\tau_i = \sum_{\substack{0 \leq k_{i-1} \leq i-1 \\ 0 \leq k_{i-2} \leq i-2 \\ \cdots \\ 0 \leq k_1 \leq 1}} \pm (\Omega p)^{\otimes i+1}(Id^{\otimes k_{i-1}} \otimes \nabla_0 \Gamma \otimes Id^{\otimes i-1-k_{i-1}})(Id^{\otimes k} \otimes \nabla_0 \Gamma \otimes Id^{\otimes i-1-k})...$$

$$...(\nabla_0 \Gamma \otimes Id + Id \otimes \nabla_0 \Gamma)\nabla_0 \Gamma.$$

En conséquence, la double construction cobar $\Omega^2 C$ est quasi-isomorphe comme BV-algèbre homotopique à $\Omega^2 H$. $\square$

5

Relèvement de structure sur la double construction cobar

Dans la première section, nous démontrons sur $\mathbb{F}_2$ (respectivement sur $\mathbb{Q}$) que la structure de G-algèbre homotopique sous-jacente de $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ relève la structure d'algèbre de Gerstenhaber restreinte (resp. d'algèbre de Gerstenhaber) de $H_*(\Omega^2|\Sigma^2 X|)$ obtenue par F. Cohen.
Dans la seconde section, nous montrons en corollaire des résultats précédents, que la structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$ relève la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky de $H_*(\Omega^2|\Sigma^2 X|)$ obtenue par E. Getzler.

5.1 Relèvement de la structure d'algèbre de Gerstenhaber restreinte de F. Cohen

Cette section est essentiellement consacrée à la preuve du théorème suivant ainsi qu'à la version rationnelle, énoncée et traitée à la fin. La preuve s'appuie sur la Proposition 4.3.9 démontrée dans la section précédente.

Théorème 5.1.1. *Soit $\mathbb{F}_2$ le corps de base. Soit $\Sigma^2 X$ une double suspension simpliciale. Alors, la structure de G-algèbre homotopique, construite par T. Kadeishvili sur $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$, induit sur l'homologie $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$, une structure d'algèbre de Gerstenhaber restreinte, libre sur $H_*^+(X)$;*

En conséquence,

Corollaire 5.1.2. *Soit $\mathbb{F}_2$ le corps de base. Les deux algèbres de Gerstenhaber restreintes, $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$ et $H_*(\Omega^2|\Sigma^2 X|)$, sont isomorphes.*

Entre autres, nous montrons que sur $\mathbb{F}_2$, les G-algèbres homotopiques possèdent une restriction à homotopie près donnée par l'opération $E_{1,1}$ évaluée sur les termes diagonaux.

5.1.1 L'homologie d'une G-algèbre homotopique comme algèbre de Gerstenhaber restreinte

Dans cette partie, le corps de base est $\mathbb{F}_2$.

Définition 5.1.3. Une algèbre de Lie restreinte de degré 1 sur $\mathbb{F}_2$ est un espace vectoriel gradué L connexe, muni d'un crochet de Lie de degré 1,

$$[-;-]_1 : L_j \otimes L_k \to L_{j+k+1}, \;\; j,k \geq 0,$$

et d'une restriction,

$$\xi : L_n \to L_{2n+1}, \;\; n \geq 0,$$

satisfaisant les relations :

1. $[-;-]_1$ est symétrique ;
2. $[x;[y;z]_1]_1 + [y;[z;x]_1]_1 + [z;[x;y]_1]_1 = 0$;
3. $[\xi(x);y]_1 = [x;[x;y]_1]_1$; et,
4. $\xi(x+y) = \xi(x) + [x;y]_1 + \xi(y)$;

ceci pour tous éléments homogènes $x, y, z \in L$.

Définition 5.1.4. Une algèbre de Gerstenhaber restreinte (de degré 1) sur $\mathbb{F}_2$ est une algèbre de Lie restreinte de degré 1, G, qui est de plus une algèbre commutative graduée, telle que :

1. $[x;yz]_1 = y[x;z]_1 + [x;y]_1 z$, pour tous éléments homogènes $x, y, z \in G$;
2. $\xi(xy) = x^2\xi(y) + \xi(x)y^2 + x[x;y]_1 y$, pour tous éléments homogènes $x, y \in G$.

Définition 5.1.5. Un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber restreintes, est un morphisme d'espaces vectoriels gradués, de degré 0, respectant le produit, le crochet et la restriction.

Proposition 5.1.6. *L'homologie $H_*(A,d)$ d'une G-algèbre homotopique $(A,d,\cdot,E_{1,k})$ sur $\mathbb{F}_2$ est une algèbre de Gerstenhaber restreinte.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.1.8 le crochet $[x;y]_1 = E_{1,1}(x;y) + E_{1,1}(y;x)$ et la multiplication forment une algèbre de Gerstenhaber. On pose

$$\xi(x) := E_{1,1}(x;x),$$

pour tout $x \in A$. Il suffit alors de vérifier que ξ induit une application en homologie, qui vérifie les propriétés relative à la restriction. Montrons en premiers lieux que les propriétés 3 et 4 de la Définition 5.1.3 sont vraies sur A, et que la propriété 2 de la Définition 5.1.4 est vraie à homotopie près.

Montrons l'égalité $[\xi(x);y]_1 = [x;[x;y]_1]_1$. On a

$$\begin{aligned} [x;[x;y]_1]_1 &= E_{1,1}(x;E_{1,1}(x;y) + E_{1,1}(y;x)) + E_{1,1}(E_{1,1}(x;y) + E_{1,1}(y;x);x) \\ &= E_{1,1}(x;E_{1,1}(x;y)) + E_{1,1}(x;E_{1,1}(y;x)) + E_{1,1}(E_{1,1}(x;y);x) + E_{1,1}(E_{1,1}(y;x);x). \end{aligned} \tag{5.1}$$

D'après l'équation (2.5), les deux premiers termes satisfont :

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x;E_{1,1}(x;y)) &= E_{1,1}(E_{1,1}(x;x);y) + E_{1,2}(x;x,y) + E_{1,2}(x;y,x) \,; \\ E_{1,1}(x;E_{1,1}(y;x)) &= E_{1,1}(E_{1,1}(x;y);x) + E_{1,2}(x;y,x) + E_{1,2}(x;x,y). \end{aligned}$$

Leur somme vaut alors

$$E_{1,1}(E_{1,1}(x;x);y) + E_{1,1}(E_{1,1}(x;y);x).$$

De même, le dernier terme de (5.1) s'écrit :

$$E_{1,1}(E_{1,1}(y;x);x) = E_{1,1}(y;E_{1,1}(x;x)) + E_{1,2}(y;x,x) + E_{1,2}(y;x,x) = E_{1,1}(y;E_{1,1}(x;x)).$$

Ainsi,

$$[x;[x;y]_1]_1 = E_{1,1}(E_{1,1}(x;x);y) + E_{1,1}(y;E_{1,1}(x;x)) = E_{1,1}(\xi(x);y) + E_{1,1}(y;\xi(x)) = [\xi(x);y]_1.$$

L'égalité $\xi(x+y) = \xi(x) + [x;y]_1 + \xi(y)$ quant à elle, est immédiate :

$$\begin{aligned} \xi(x+y) &= E_{1,1}(x+y;x+y) \\ &= E_{1,1}(x;x) + E_{1,1}(y;x) + E_{1,1}(x;y) + E_{1,1}(y;y) \\ &= \xi(x) + [x;y]_1 + \xi(y). \end{aligned} \tag{5.2}$$

L'égalité $\xi(xy) = x^2\xi(y) + \xi(x)y^2 + x[x;y]_1 y$ est vraie à homotopie près sur les chaînes. Ceci résulte des équations (2.8) et (2.9) qui permettent d'écrire sur les chaînes (désignant par $\sim$ la relation d'homotopie),

$$\begin{aligned} \xi(xy) &= E_{1,1}(xy;xy) \\ &= xE_{1,1}(y;xy) + E_{1,1}(x;xy)y \\ &\sim x^2E_{1,1}(y;y) + xE_{1,1}(y;x)y + xE_{1,1}(x;y)y + E_{1,1}(x;x)y^2 \\ &\sim x^2\xi(y) + x[x;y]_1 y + \xi(x)y^2 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que ξ induit une restriction en homologie.
D'après l'équation (2.7) l'opération $E_{1,1}$ est une homotopie à la commutativité du produit. En particulier,

$$dE_{1,1}(x;x) + E_{1,1}(dx;x) + E_{1,1}(x;dx) = xx + xx = 0, \text{ pour tout } x \in A.$$

Ainsi, si $x \in A$ est un cycle,

$$d\xi(x) = dE_{1,1}(x;x) = E_{1,1}(dx;x) + E_{1,1}(x;dx) = 0 + 0 = 0.$$

Si $y = dx \in A$ est un bord,

$$\xi(y) = E_{1,1}(y;y) = E_{1,1}(dx;dx) = dE_{1,1}(dx;x) + E_{1,1}(d^2x;x) + dx\cdot x + xdx = dE_{1,1}(dx;x) + d(x^2),$$

est également un bord. Ainsi, pour $x \in A$ un cycle et $y \in A$, on obtient d'après (5.2) :

$$\begin{aligned} \xi(x+dy) &= \xi(x) + [x;dy] + \xi(dy) \\ &= \xi(x) + d[x;y] + [dx;y] + dE_{1,1}(dy;y) \\ &= \xi(x) + d[x;y] + dE_{1,1}(dy;y) + d(y^2). \end{aligned}$$

Ainsi, ξ induit une application en homologie qui est une restriction. □

Remarque 5.1.7. Une G-algèbre homotopique définit une structure d'algèbre de Lie restreinte de degré 1 sur le complexe de chaînes.

Proposition 5.1.8. *Un morphisme de G-algèbres homotopiques induit un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber restreintes en homologie.*

Démonstration. La Proposition 2.1.9 affirme qu'un tel morphisme induit un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber en homologie. De plus, le morphisme, notons-le f, satisfait l'égalité (2.15), qui donne sur $\mathbb{F}_2$:

$$E_{1,1}(f_1(x); f_1(y)) + f_1 E_{1,1}(x; y) = f_2(x; y) + f_2(y; x).$$

En prenant $x = y$, on obtient

$$f_1(\xi(x)) = \xi(f_1(x)).$$

□

Corollaire 5.1.9. *Les deux algèbres de Gerstenhaber restreintes, $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$ et $H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X))$, sont isomorphes.*

Démonstration. Ceci résulte de la Proposition 5.1.6 et de la Proposition 4.3.9. □

On définit maintenant l'algèbre de Gerstenhaber restreinte libre.

Soit L_{1r} une algèbre de Lie restreinte de degré 1. Alors, l'algèbre commutative libre sur L_{1r}, $S(L_{1r})$ forme une algèbre de Gerstenhaber restreinte. En effet, l'identité de Poisson

$$[xy; z]_1 = x[y; z]_1 + [x; z]_1 y,$$

revient à dire que l'application

$$\begin{aligned} ad_1(x) := [-; x]_1 : S(L_{1r}) &\to S(L_{1r}) \\ y &\mapsto [y; x]_1 \end{aligned}$$

est une dérivation de degré $+1$ pour l'algèbre $(S(L_{1r}), \cdot)$. On considère une base de L_{1r} comme k-espace vectoriel. Il suffit alors d'étendre l'application $ad_1(l) : L_{1r} \to L_{1r} \subset S(L_{1r})$ comme dérivation de $S(L_{1r})$ pour tout $l \in L_{1r}$. Et faire de même pour $[x; -]_1 : L_{1r} \to S(L_{1r})$ pour tout $x \in S(L_{1r})$.
On étend la restriction via la relation de multiplication (deuxième point de la Définition 5.1.4).

Soit V un dg-espace vectoriel $V_0 = 0$. Si $L_{1r}(V)$ désigne l'algèbre de Lie restreinte de degré 1, libre sur V, alors $S(L_{1r}(V))$ est l'algèbre de Gerstenhaber restreinte, libre sur V.

5.1.2 Démonstration du théorème

Nous utiliserons le théorème de comparaison suivant, dont on trouve la démonstration dans [ML95, Théorème 11.1 p. 355]. On considère une suite spectrale E d'espaces vectoriels sur un anneau commutatif, telle que pour chaque p, q, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E^2_{p,0} \otimes E^2_{0,q} \xrightarrow{\chi} E^2_{p,q} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Tor}(E^2_{p-1,0}, E^2_{0,q}) \longrightarrow 0. \tag{5.3}$$

Théorème 5.1.10 (Théorème de comparaison). *Soit $\Phi : E \to \overline{E}$ un morphisme de suites spectrales (d'espaces vectoriels sur un anneau commutatif) de premier quadrant, chacune d'elles vérifiant la propriété (5.3), et tels que Φ commute avec les applications $\chi, \overline{\chi}, \sigma, \overline{\sigma}$ dans (5.3). Alors, deux des conditions parmi les suivantes impliquent la troisième :*

1. *$\Phi^2_{p,0} : E^2_{p,0} \to \overline{E}^2_{p,0}$ est un isomorphisme pour tout $p \geq 0$;*

2. $\Phi^2_{0,q} : E^2_{0,q} \to \overline{E}^2_{0,q}$ *est un isomorphisme pour tout* $q \geq 0$;

3. $\Phi^\infty_{p,q} : E^\infty_{p,q} \to \overline{E}^\infty_{p,q}$ *est un isomorphisme pour tout* p, q.

Démonstration du Théorème 5.1.1

Le second point est immédiat une fois montré le premier. En effet, les deux algèbres sont alors isomorphes à $S(L_{1r}(H^+_*(X))$ comme algèbres de Gerstenhaber restreintes.
D'après la Proposition 4.3.9 et le Corollaire 5.1.9, il ne reste qu'à démontrer que la structure de G-algèbre homotopique de la double construction cobar $\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$, induit en homologie une structure d'algèbre de Gerstenhaber restreinte, libre sur $H^+_*(X)$.

On note $[-;-]_1$ le crochet de Gerstenhaber sur $H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X))$,

$$[x;y]_1 = E_{1,1}(x;y) + E_{1,1}(y;x),$$

et ξ_1 la restriction,

$$\xi_1(x) = E_{1,1}(x;x)$$

pour tout $x \in H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X))$.

On dispose de l'inclusion $\iota : H^+_*(X) \cong \mathrm{s}^{-2} H^+_*(\Sigma^2 X) \hookrightarrow H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X))$. Ainsi, par liberté des foncteurs S, et L_{1r} on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} SL_{1r}(H^+_*(X)) \arrow[r, "SL_{1r}(\iota)"] & H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)) \\ H^+_*(X) \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

où $SL_{1r}(\iota)$ est un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber restreintes. Il suffit de montrer que $SL_{1r}(\iota)$ est un isomorphisme. Pour cela on construit deux suites spectrales $\overline{E}$ et E reliées par un morphisme $\Phi : E \to \overline{E}$ satisfaisants :

$$TH^+_*(\Sigma X) \otimes SL_{1r}H^+_*(X) = E^2 \xrightarrow{T(\iota) \otimes S(L_{1r}(\iota))} \overline{E}^2 = H_*(\Omega H_*(\Sigma^2 X)) \otimes H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)).$$

On conclu à l'aide du théorème de comparaison, utilisant le fait que $T(\iota)$ et Φ^∞ sont des isomorphismes.

Considérons l'application

$$\pi : \Omega H_*(\Sigma^2 X) \otimes \Omega^2 H_*(\Sigma^2 X) \to \Omega H_*(\Sigma^2 X)$$

définie par
$\pi(x \otimes y) = \epsilon(y) x$, avec ϵ l'augmentation de $\Omega H_*(\Sigma^2 X)$. L'espace total

$$\mathcal{E} := \Omega H_*(\Sigma^2 X) \otimes \Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$$

est muni de la différentielle d et d'une homotopie contractante s définies comme dans [AH56, Axiomes (R1),(R2),(D1),(D2)] et que l'on détaille plus bas. Ces dernières font de l'espace total, un espace acyclique, [AH56, Lemme 2.3]. Notons

$$B = \Omega H_*(\Sigma^2 X)$$

et

$$A = \Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$$

de sorte que $\mathcal{E} = B \otimes A$. On définit une filtration de $\mathcal{E}$ par

$$F_r\mathcal{E} = \bigoplus_{p \leq r} B_p \otimes A.$$

Suivant [AH56], on obtient une suite spectrale $\overline{E}^r$ associée à cette filtration, d'aboutissement l'homologie de $\mathcal{E}$, et de deuxième page

$$\overline{E}^2_{p,q} = H_p(\Omega H_*(\Sigma^2 X)) \otimes H_q(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)).$$

L'espace total étant acyclique, la page $\overline{E}^\infty$ est $\overline{E}^\infty_{0,0} = \mathbb{F}_2$, $\overline{E}^\infty_{p,q} = 0$ si $(p,q) \neq (0,0)$.

La suite spectrale suivante est utilisée par F. Cohen [Coh76, III,p.228] comme une suite spectrale de dg-algèbres, modèle de la suite spectrale de Serre associée à la fibration des chemins,

$$\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X \to P\Omega^n\Sigma^{n+1}X \to \Omega^n\Sigma^{n+1}X, \quad n > 0.$$

Par cette méthode, il montre que l'homologie $H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X)$ est, en particulier, l'algèbre de Gerstenhaber restreinte de degré n, libre sur $H_*(\Sigma^{n+1}X)$.

On définit une suite spectrale E^r dont la deuxième page est

$$E^2_{p,q} = (T(H_*^+(\Sigma X)))_p \otimes (S(L_{1r}(H_*^+(X))))_q,$$

et dont les différentielles sont définies de sorte que E^r soit une suite spectrale de dg-algèbres, de transgressions

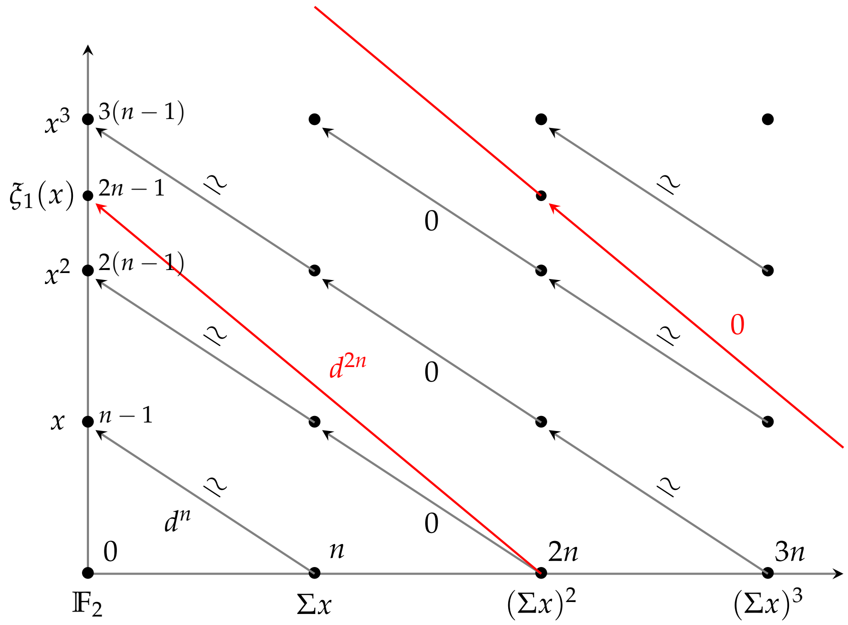
$$\begin{aligned} t(\Sigma x) &= x \\ t(\xi_0^k(\Sigma x)) &= \xi_1^k(x) \\ t(ad_0(\Sigma x_1)\cdots ad_0(\Sigma x_{k-1})(\Sigma x_k)) &= ad_1(x_1)\cdots ad_1(x_{k-1})(x_k), \end{aligned}$$

pour tout $\Sigma x, \Sigma x_1, ..., \Sigma x_k \in H_*^+(\Sigma X)$, où l'on a noté :

- $\xi_0(x) = x^2$ la restriction de $TH_*^+(\Sigma X)$ comme algèbre de Lie restreinte de degré 0 ;
- ξ_1 la restriction de $SL_{1r}(H_*^+(X))$;
- $[-;-]_0$ le crochet de Lie de $TH_*^+(\Sigma X)$;
- $[-;-]_1$ le crochet de Gerstenhaber de $SL_{1r}H_*^+(X)$; et,
- $ad_j(x)(y) = [y;x]_j$, pour $j = 0$ ou 1.

La r-ième transgression $t = d^r : E^r_{r,0} \to E^r_{0,r-1}$, est donc étendue à $d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ comme dérivation.

Prenons l'exemple d'un générateur $\Sigma x \in H_n^+(\Sigma X)$ de degré n ; la suite spectrale est :



Les crochets sont tous nuls puisque $[\Sigma x; \Sigma x]_0 = 2(\Sigma x)^2 = 0$ et $[\xi_0(\Sigma x); \Sigma x]_0 = [\Sigma x; [\Sigma x; \Sigma x]_0]_0$; reste Σx, la restriction $\xi_0(\Sigma x) = (\Sigma x)^2$ et ses itérations, plus les produits résultants. Cette suite spectrale se décompose en suites spectrales élémentaires sur les éléments transgressifs Σx, $\xi_0(\Sigma x)$,$\xi_0^2(\Sigma x)$,..., et de différentielle, la transgression correspondante. En effet, $T(\Sigma x)$ s'écrit additivement comme l'algèbre extérieure sur les éléments transgressifs Σx, $\xi_0^k(\Sigma x)$, $k \geq 1$ et $S(L_{1r}(x))$ s'écrit additivement comme l'algèbre polynomiale sur l'image de ces éléments transgressifs, x, $\xi_1^k(x)$, $k \geq 1$. Les suites spectrales élémentaires sont alors de la forme

$$\Lambda(y) \otimes P(t(y)),$$

où y parcourt les éléments transgressifs de $T(\Sigma x)$. Une telle présentation de $T(\Sigma x)$ se généralise à $TH_*^+(\Sigma X)$ via les $[-;-]_0$-*produits élémentaires*. Cette présentation est due à P. J. Hilton [Hil55]. Considérons l'algèbre de Lie libre $L(H_*^+(\Sigma X))$ sans restriction, de crochet $[-;-]_0$. Les $[-;-]_0$-produits élémentaires sont définis comme suit.
Les éléments $x \in H_*^+(\Sigma X)$ sont des $[-;-]_0$-produits élémentaires de poids 1. Supposons que les $[-;-]_0$-produits élémentaires de poids j ont été définis pour $j < k$. Alors, un produit de poids k est un élément $[x; y]_0$ tel que :

1. x est un $[-;-]_0$-produits élémentaires de poids u ;
2. y est un $[-;-]_0$-produits élémentaires de poids v ;
3. $u + v = k$;
4. $x < y$, et si $y = [z; t]_0$ pour z et t élémentaires, alors $z \leq x$.

On ordonne les générateurs $(\Sigma x_i)_i$ de $H_*^+(\Sigma X)$ par dimension ; les $[-;-]_0$-produits élémentaires sont alors les éléments

$$\Sigma x_k, \cdots, [\Sigma x_k; \Sigma x_l]_0, \cdots, [\Sigma x_j; [\Sigma x_k; \Sigma x_l]_0]_0, \cdots$$

où $j < k < l$. D'après [Hil55] on obtient

$$L(H_*^+(\Sigma X)) \cong \operatorname{span}\{y \mid y \text{ un } [-;-]_0 - \text{produits élémentaires}\},$$

comme espaces vectoriels. En notant p_j les $[-;-]_0$-produits élémentaires, nous avons l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$TH_*^+(\Sigma X) \cong \bigotimes_j P(p_j),$$

où P désigne l'algèbre polynomiale. Pour prendre en compte la restriction, nous écrivons $P(p_j)$ comme $\wedge_{k\geq 0}(p_j^{2^k})$ où, $\wedge$ désigne l'algèbre extérieure[1]. On obtient une décomposition en $[-;-]_0$-produits élémentaires et ξ_0-*produits élémentaires*,

$$TH_*^+(\Sigma X) \cong \bigotimes_j \bigwedge_{k\geq 0}(p_j^{2^k}).$$

D'autre part, rappelons que $L_{1r} = \mathrm{s}^{-1} L_r \mathrm{s}$, c'est à dire que $[x;y]_1 = \mathrm{s}^{-1}[\mathrm{s}\,x;\mathrm{s}\,y]_0$ et $\xi_1(x) = \mathrm{s}^{-1}\,\xi_0(\mathrm{s}\,x)$. On obtient alors que

$$SL_{1r}(H_*^+(\Sigma X)) \cong S(\mathrm{span}\{y, \xi_1^k(y) \mid y \text{ un } [-;-]_1 - \text{produits élémentaires}, \; k \geq 1\}).$$

Alors, la suite spectrale E, se décompose en produits tensoriels de suites spectrales élémentaires de la forme

$$\wedge(y) \otimes P(t(y)),$$

où y parcourt l'ensemble des $[-;-]_0$-produits élémentaires et ξ_0-produits élémentaires.

Ainsi, la suite spectrale E converge vers $E^\infty_{0,0} = \mathbb{F}_2$, $E^\infty_{p,q} = 0$ si $(p,q) \neq (0,0)$.

Revenons à l'application

$$T(\iota) \otimes S(L_{1r}(\iota)) : E^2 \to \overline{E}^2.$$

Les deux suites spectrales E^2 et $\overline{E}^2$ satisfont la condition (5.3) relative au théorème de comparaison. Pour utiliser ce théorème, il suffit alors de montrer : que l'application $\Phi^2 := T(\iota) \otimes S(L_{1r}(\iota))$ induit un morphisme de suites spectrales $\Phi : E \to \overline{E}$; que $T(\iota)$ est un isomorphisme ; que $\Phi^\infty : E^\infty \to \overline{E}^\infty$ est un isomorphisme.

On montre maintenant que cette application Φ^2 :

$$TH_*^+(\Sigma X) \otimes SL_{1r}H_*^+(X) \xrightarrow{T(\iota) \otimes S(L_{1r}(\iota))} H_*(\Omega H_*(\Sigma^2 X)) \otimes H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X))$$

induit un morphisme de suites spectrales.

Pour cela, détaillons la différentielle de $\mathcal{E} = B \otimes A$. Les axiomes (R1) et (R2) déterminent l'homotopie contractante montrant l'acyclicité de $\mathcal{E}$:

$$s(1) = 0, \;\; s(\mathrm{s}^{-1}\,x) = x, \;\; s(x) = 0, \qquad \text{pour } \mathrm{s}^{-1}\,x \in A \qquad \text{(R1)}$$
$$s(xy) = s(x)y + \epsilon(x)s(y), \qquad \text{pour } x \in \mathcal{E}, y \in A. \qquad \text{(R2)}$$

Les axiomes (D1) et (D2) déterminent la différentielle de $\mathcal{E}$:

$$d(x) = (1 - sd)(\mathrm{s}^{-1}\,x), \qquad \text{pour } x \in B \qquad \text{(D1)}$$
$$d(xy) = d(x)y + (-1)^{|x|}xd(y), \qquad \text{pour } x \in \mathcal{E}, y \in A. \qquad \text{(D2)}$$

[1]Pour lever toute ambigüité, rappelons que sur $\mathbb{F}_2$, l'algèbre extérieure $\wedge V$ d'un espace vectoriel V, est définie comme l'algèbre tensorielle TV quotientée par l'idéal engendré par $\{v \otimes v \mid v \in TV\}$.

Alors, pour tout $x \in s^{-1} H^+_{p+1}(\Sigma^2 X) \subset B_p$, on obtient

$$d(x) = s^{-1} x \in s^{-2} H^+_{p+1}(\Sigma^2 X) \subset F_0\mathcal{E},$$

car le coproduit ∇_0 est primitif sur $H^+_*(\Sigma^2 X)$. Ainsi, sur de tels éléments x de degrés p, on a $d^r(x) = 0$ si $r < p$. De plus, pour tout $x \in s^{-1} H^+_{p+1}(\Sigma^2 X) \subset \overline{E}^p_{p,0} \subset B_p$, on obtient

$$d^p(x) = s^{-1} x \in s^{-2} H^+_{p+1}(\Sigma^2 X) \subset \overline{E}^p_{0,p-1} \subset A_{p-1}.$$

Plus généralement, les éléments de $B_p = \Omega H_*(\Sigma^2 X)_p$ de degré p, qui sont des cycles (après desuspension) pour d_A sont alors dans $\overline{E}^p_{p,0}$. D'autre part, par construction de l'opération

$$E_{1,1} : \Omega^2 H_*(\Sigma^2 X) \otimes \Omega^2 H_*(\Sigma^2 X) \to \Omega^2 H_*(\Sigma^2 X),$$

le crochet de Gerstenhaber $[-;-]_1 = E_{1,1}(1-\tau)$ est compatible avec les suspensions, c'est à dire, pour tout $x, y \in s^{-2} H^+_*(\Sigma^2 X) \subset s^{-1} \Omega H_*(\Sigma^2 X)$, on a $[x;y]_1 = s^{-1}[s\,x; s\,y]_0$. Et de même pour la restriction, $\xi_1(x) = s^{-1} \xi_0(s\,x)$. Alors,

$$t(ad_0(s^{-1} x_1) \cdots ad_0(s^{-1} x_{k-1})(s^{-1} x_k)) = ad_1(x_1) \cdots ad_1(x_{k-1})(x_k)$$
$$t(\xi_0^k(s^{-1} x)) = \xi_1^k(x),$$

pour tout $s^{-1} x, s^{-1} x_1, ..., s^{-1} x_k \in s^{-1} H^+_*(\Sigma^2 X)$. Finalement, puisque Φ^2 est un morphisme d'algèbres, on déduit qu'il commute avec les différentielles. Par suite, Φ est un morphisme de suites spectrales.
Le morphisme Φ^∞ est clairement un isomorphisme ; de même pour $T(\iota)$. Ceci termine la démonstration.

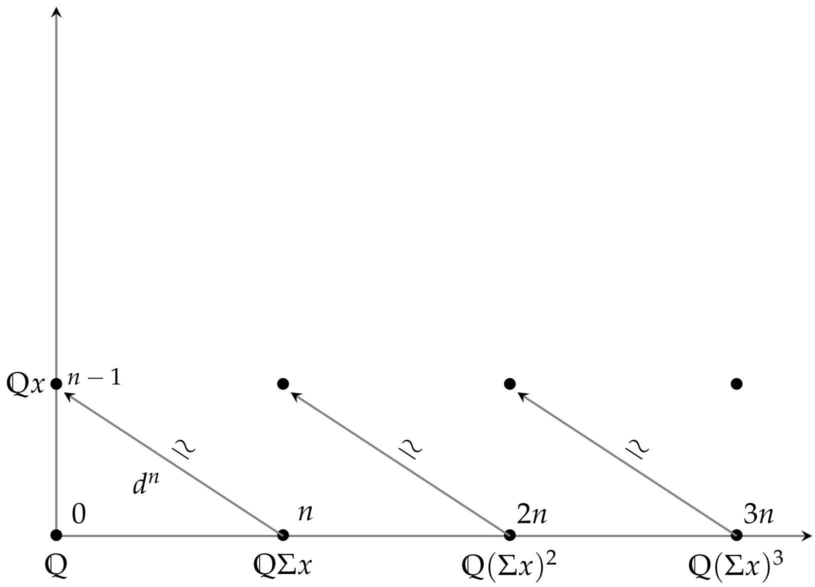
Version rationnelle

Théorème 5.1.11. *Soit $\mathbb{Q}$ le corps de base. Soit $\Sigma^2 X$ une double suspension simpliciale. Alors, la structure de G-algèbre homotopique, construite par T. Kadeishvili sur $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$, induit sur l'homologie $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$, une structure d'algèbre de Gerstenhaber, libre sur $H^+_*(X)$;*

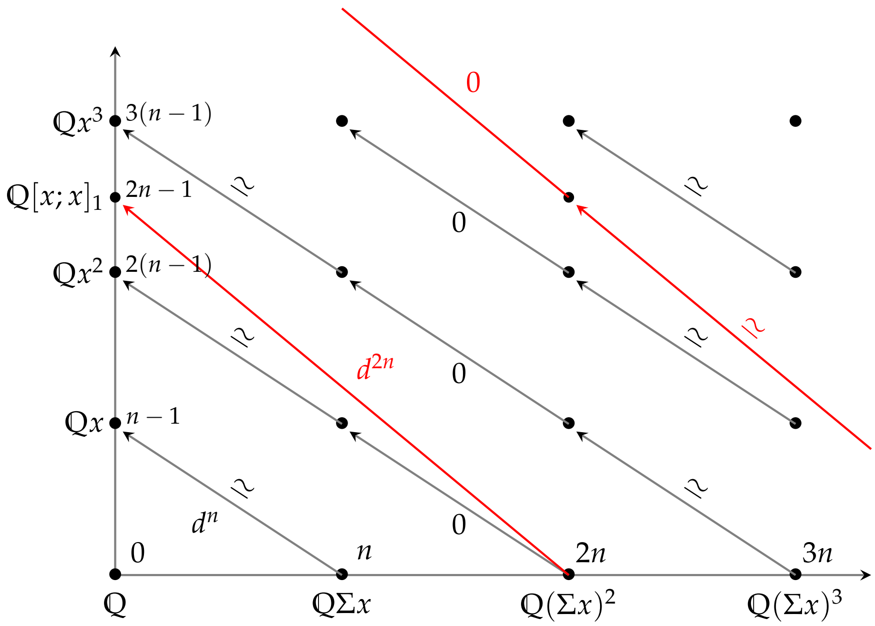
En conséquence,

Corollaire 5.1.12. *Soit $\mathbb{Q}$ le corps de base. Alors, les deux algèbres de Gerstenhaber, $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$ et $H_*(\Omega^2 |\Sigma^2 X|)$, sont isomorphes.*

Démonstration du Théorème 5.1.11. La preuve est essentiellement la même qu'en caractéristique 2. On remplace le foncteur L_{1r} par L_1 adjoint du foncteur oubli des algèbres de Lie de degré 1 vers les espaces vectoriels gradués. L'algèbre symétrique $S(V)$ sur un espace vectoriel gradué V, est TV/I où I est l'idéal engendré par les éléments $v \otimes w - (-1)^{|v||w|} w \otimes v$. Alors, $S(L_1(V))$ est une algèbre de Gerstenhaber de crochet $[v, w]_1 = vw - (-1)^{(|v|-1)(|w|-1)} wv$ pour $v, w \in V$. La différence notable réside dans la décomposition de la suite spectrale modèle E. En effet, sur un générateur $\Sigma x \in H^+_n(\Sigma X)$ de degré n pair, la suite spectrale est :



et sur un générateur $\Sigma x \in H_n^+(\Sigma X)$ de degré n impair, la suite spectrale est :



La suite spectrale E se décompose alors en suites spectrales élémentaires de la forme

$$P(y) \otimes S(t(y)) \ \text{ et } \ S(z) \otimes P(t(z))$$

où, y et z parcours les $[-;-]_0$-produits élémentaires de $TH_*^+(\Sigma X)$ de degrés pairs et impairs respectivement. $\square$

5.2 Relèvement de la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky de E. Getzler

On s'intéresse ici à la structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$, notamment à montrer qu'elle induit une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky en homologie isomorphe à la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky obtenue sur $H_*(\Omega^2\Sigma^2|X|)$

par l'action diagonale de S^1.
Le corps de base est $\mathbb{Q}$.

Algèbre de Batalin-Vilkovisky libre

On se fixe un espace vectoriel connexe V et un opérateur $\Delta : V_* \to V_{*+1}$ tel que $\Delta^2 = 0$. On définit l'algèbre de Batalin-Vilkovisky libre sur (V, Δ) comme

$$S(L_1(V \oplus \Delta(V))).$$

L'opérateur Δ est étendu comme BV-opérateur via la formule

$$\Delta(xy) = \Delta(x)y + (-1)^{|x|}x\Delta(y) + (-1)^{|x|}[x;y]_1,$$

pour tous éléments homogènes $x, y \in L_1(V)$, et

$$\Delta([x;y]_1) = [\Delta(x);y]_1 + (-1)^{|x|-1}[x;\Delta(y)]_1,$$

pour tous éléments homogènes $x, y \in L_1(V)$.
Notons que si $\Delta : V \to V$ est nulle, alors $\Delta : S(L_1(V)) \to S(L_1(V))$ est le BV-opérateur donné par l'extension du crochet de Gerstenhaber. La structure de Batalin-Vilkovisky obtenue est appelée la structure *d'algèbre de Batalin-Vilkovisky canonique sur l'algèbre de Gerstenhaber* $S(L_1(V))$, cf. [TT00, Section 1.1].
De plus, si l'algèbre de Gerstenhaber libre $S(L_1(V))$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky de BV-opérateur nul quand restreint à V, alors $S(L_1(V))$ est l'algèbre de Batalin-Vilkovisky canonique.

Algèbre de Batalin-Vilkovisky sur l'homologie d'un espace de lacets doubles.

Explicitons la structure de Batalin-Vilkovisky sur $H_*(\Omega^2\Sigma^2 X)$ obtenue par E. Getzler [Get94], cf. Théorème 2.3.2.

Soit Y un S^1-espace, c'est à dire, un espace topologique pointé en $*$, muni d'une action de S^1 telle que $g \cdot * = *$ pour tout $g \in S^1$. E. Getzler montre [Get94] que l'action diagonale de S^1 sur $\Omega^2 Y$, donnée par $(g \cdot f)(s) := g \cdot f(g^{-1} \cdot s)$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_*(S^2, Y)$, $g \in S^1$ et $s \in S^2$, induit une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur $H_*(\Omega^2 Y)$. Pour $Y = \Sigma^2 X = S^2 \wedge X$ une double suspension, on munit Y de l'action canonique de S^1 sur S^2 et triviale sur X i.e. $g \cdot (s \wedge x) = (g \cdot s) \wedge x$ pour tous $g \in S^1$ et $s \wedge x \in S^2 \wedge X$. Alors, l'adjonction $X \to \Omega^2\Sigma^2 X$ est équivariante pour l'action triviale sur X et l'action diagonale sur $\Omega^2\Sigma^2 X$. En conséquence, cf. [GM08], $H_*(\Omega^2\Sigma^2 X)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky canonique libre sur $H_*^+(X)$.

Relèvement de la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky

Rappelons que, d'après le Théorème 4.3.6, $\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$ est une BV-algèbre homotopique et par suite, que son homologie $H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X))$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.
D'autre part, l'ensemble simplicial X est vu comme muni d'une action de S^1 triviale. Alors, l'inclusion

$$\iota : (H_*^+(X), 0) \to H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)),$$

se relève en un unique morphisme d'algèbres de Batalin-Vilkovisky,

$$SL(\iota) : S(L_1(H_*^+(X))) \to H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)),$$

faisant commuter le diagramme habituel.

Regardons l'opérateur

$$H(\Delta_{CM}) : H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)) \to H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)),$$

induit par l'opérateur de Connes-Moscovici $\Delta_{CM} : \Omega^2 H_*(\Sigma^2 X) \to \Omega^2 H_*(\Sigma^2 X)$. Par construction, nous avons :

$$\Delta_{CM}|_{s^{-1}\,\Omega H_*(\Sigma^2 X)} = 0 \quad \text{et } \textit{a fortiori} \quad \Delta_{CM}|_{s^{-2}\,H_*^+(\Sigma^2 X)} = 0.$$

Alors,

$$H(\Delta_{CM})|_{H_*^+(X)} = 0.$$

De plus, d'après le Théorème 5.1.11, l'algèbre de Gerstenhaber sous-jacente $H_*(\Omega^2 H_*(\Sigma^2 X))$ est l'algèbre de Gerstenhaber libre sur $H_*^+(X)$. Ainsi, nous obtenons,

Théorème 5.2.1. *Soit $\mathbb{Q}$ le corps de base. Soit $\Sigma^2 X$ une double suspension simpliciale. Alors, la structure de BV-algèbre homotopique (de BV-opérateur l'opérateur de Connes-Moscovici) sur $\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)$, induit sur l'homologie $H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X))$, une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky canonique, libre sur $H_*^+(X)$.*

En conséquence,

Corollaire 5.2.2. *Les deux algèbres de Batalin-Vilkovisky, $(H_*(\Omega^2 C_*(\Sigma^2 X)), \Delta_{CM})$ et $(H_*(\Omega^2 |\Sigma^2 X|), \Delta)$, sont isomorphes.*

6

Structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar dans le cas rationnel

Ce chapitre est consacré à la déformation de la structure de dg-algèbre de Hopf de la construction cobar de Baues lorsque l'anneau de coefficients contient $\mathbb{Q}$. Nous obtenons alors une structure de BV-algèbre homotopique sur la construction cobar de la construction cobar déformée.

Nous détaillons la déformation de la construction cobar en une dg-algèbre de Hopf cocommutative et montrons comment l'antipode est déformée. On étend la déformation de la structure de dg-bigèbre de la cobar construction traitée dans [Bau98] à une déformation de la dg-algèbre de Hopf. La construction cobar obtenue $(\Omega C_*(X), \nabla'_0, S')$ vient avec des homotopies-(anti)dérivations connectant la structure de dg-algèbre de Hopf (∇'_0, S') avec la structure initiale (∇_0, S).

Soit $\mathbf{DGA}_0$ la catégorie des dg-algèbres connexes (associatives). Pour un dg-espace vectoriel libre V, on note $L(V)$ la dg-algèbre de Lie libre qui est l'algèbre de Lie graduée libre sur le dg-espace vectoriel libre V. On pose $V_{\leq n}$ (resp. $V_{<n}$) le sous-dg-espace vectoriel d'éléments $v \in V$ tels que $|v| \leq n$ (resp. $|v| < n$). En outre, $V_{\geq n}$ (resp. $V_{>n}$) sera le sous-ensemble gradué d'élément $v \in V$ tels que $|v| \geq n$ (resp. $|v| > n$).

Définition 6.0.3. Soit $f, g : A \to B$ deux applications entre deux dg-espaces vectoriels A et B. Une homotopie-dérivation entre f et g est une application $F : A \to B$ satisfaisant :

$$dF + Fd = f - g \tag{6.1}$$

$$F(ab) = F(a)g(b) + (-1)^{|F||a|} f(a)F(b). \tag{6.2}$$

Autrement dit c'est une (f, g)-dérivation, cf. Définition 1.1.4, et une homotopie entre f et g.

Définition 6.0.4. Soit $f, g : A \to B$ deux applications entre deux dg-espaces vectoriels A et B.

Une homotopie-anti-dérivation entre f et g est une application $\Gamma : A \to B$ satisfaisant :

$$d\Gamma + \Gamma d = f - g \tag{6.3}$$
$$\Gamma(ab) = (-1)^{|a||b|}(\Gamma(b)g(a) + (-1)^{|\Gamma||a|}f(b)\Gamma(a)). \tag{6.4}$$

L'essentiel de cette section est de montrer qu'une dg-bigèbre à homotopie près vérifiant la propriété n-good$^+$ ci-dessous, s'étend en une dg-bigèbre à homotopie près vérifiant la propriété $(n+1)$-good$^+$. Cette condition exprime une dg-bigèbre à homotopie près de la forme TV pour laquelle le coproduit est coassociatif et cocommutatif sur $T(V_{\leq n})$ avec une antipode sur $T(V_{\leq n})$. On appliquera ceci à la construction cobar $(\Omega C_*(X), \nabla_0, S)$ qui est 1-good$^+$ pour obtenir une dg-algèbre de Hopf involutive $(\Omega C_*(X), \nabla_0', S')$ par un procédé récursif.

Définition 6.0.5. Une dg-bigèbre à homotopie près (A, ∇, G_1, G_2) est un objet A dans $\mathbf{DGA}_0$ munie d'un coproduit ∇ dans $\mathbf{DGA}_0$ tel que (A, ∇) est une cogèbre dans $\mathbf{DGA}_0$ qui est cocommutative à homotopie G_1 près et coassociative à homotopie G_2 près. De plus, ces deux homotopies G_1 et G_2 sont des homotopies-dérivations.

Définition 6.0.6. Soit (A, ∇, G_1, G_2) une dg-bigèbre à homotopie près telle que $A = TV$ comme algèbre libre, où V est un dg-espace vectoriel avec $V_0 = 0$. De plus, on requiert que l'augmentation de TV soit la counité de ∇. Le 5-uplet (A, ∇, G_1, G_2, V) est dit n-good si les conditions suivantes (6.5), (6.6), (6.7) sont vérifiées.

$$\nabla = \tau\nabla \text{ et } (\nabla \otimes 1)\nabla = (1 \otimes \nabla)\nabla \text{ sur } V_{\leq n} \tag{6.5}$$
$$d(V_{\leq n+1}) \subset L(V_{\leq n}) \subset T(V) = A \tag{6.6}$$
$$V_{\leq n} \subset \ker(\overline{\nabla}). \tag{6.7}$$

Si, de plus, il existe une application de complexes $S : A \to A$ telle que la condition

$$\mu(1 \otimes S)\nabla = \eta\epsilon = \mu(S \otimes 1)\nabla \text{ sur } V_{\leq n} \tag{6.8}$$

est satisfaite, alors A est dite n-good$^+$.

On va déformer une dg-bigèbre satisfaisant la condition n-good$^+$ en une dg-bigèbre satisfaisant la condition $(n+1)$-good$^+$. On rappelle en premiers lieux la théorie concernant la déformation des dg-bigèbres à homotopie près ; ceci recouvre les pages 428 à 437 de [Ani89].

On considère un espace vectoriel gradué V tel que $V_0 = 0$. L'algèbre tensorielle $T(V)$ munie du crochet

$$[x; y] := x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x$$

pour tout x et y dans $T(V)$, est une algèbre de Lie. On va donner une base de l'algèbre universelle enveloppante $UL(V) = T(V)$. Pour k éléments homogènes $x_1, ..., x_k$ de $L(V)$, on pose

$$C(x_1, ..., x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} (-1)^\epsilon x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k)}$$

qui est un élément de l'algèbre tensorielle libre $T(V)$, où $(-1)^\epsilon$ est le signe $\mathrm{Sign}(\sigma)$ défini en 1.1.26. On définit $U_0(V) = R$, $U_1(V) = L(V)$ puis

$$U_k(V) = \mathrm{span}_R\{C(x_1, ..., x_k) \mid x_i \in L(V)\} \subseteq T(V).$$

On note $I(V)$ l'idéal d'augmentation de $T(V)$, i.e. $I(V) = \oplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$. Pour un coproduit (non nécessairement coassociatif ou cocommutatif mais counitaire)

$$\nabla : TV \to TV \otimes TV$$

on définit

$$\phi_\nabla : I(V)^{\otimes 2} \to I(V)^{\otimes 2} \oplus I(V)^{\otimes 3}$$

de composantes $((\phi_\nabla)_1, (\phi_\nabla)_2)$ données par :

$$(\phi_\nabla)_1 = 1 - \tau;$$
$$(\phi_\nabla)_2 = \overline{\nabla} \otimes 1 - 1 \otimes \overline{\nabla},$$

Lorsque le coproduit ∇ est le *shuffle*-coproduit $\nabla_{\mathrm{Sh}} : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ cf. Exemple 1.1.26, on note $\phi_{\nabla_{\mathrm{Sh}}}$ simplement par ϕ. De façon évidente, si $\overline{\nabla}$ est coassociatif et cocommutatif alors $\phi_\nabla \overline{\nabla} = 0$. On définit maintenant un "inverse à gauche" de ∇_{Sh},

$$m : \oplus_{i=1}^{k-1} U_i \otimes U_{k-i} \to U_k$$

par

$$m(x_1 \otimes C(x_2, ..., x_k)) = \frac{1}{k} C(x_1, ..., x_k).$$
$$m = 0 \ \text{ sur } \ \oplus_{i=2}^{k-1} U_i \otimes U_{k-i}.$$

et

$$\lambda : I(V)^{\otimes 2} \oplus I(V)^{\otimes 3} \to I(V)^{\otimes 2}$$

par

$$\lambda(a \otimes b) = \frac{-i}{k} \tau(a \otimes b) \ \text{ sur } \ U_i \otimes U_{k-i}$$
$$\lambda(a \otimes b \otimes c) = \frac{i+j}{k}(1+\tau)(m(a \otimes b) \otimes c) \ \text{ sur } \ U_i \otimes U_j \otimes U_{k-i-j}.$$

Établissons quelques propriétés.

Lemme 6.0.7. *1.* $\phi \overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}} = 0$.

2. $m\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}} = 1$ *sur* $\oplus_{i=2}^{k-1} U_i$.

3. $\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}} m + \lambda \phi = 1$ *sur* $\oplus_{i=1}^{k-1} U_i \otimes U_{k-i}$.

4. $\phi \lambda \phi = \phi$.

5. $\mathrm{Ker}(\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}}) = \mathrm{Im}(1 - m\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}})$.

Démonstration. Le point 1 résulte de la coassociativité et la cocommutativité de ∇_{Sh}.
Montrons le point 2 : les seuls éléments non annulés par m sont ceux arrivant dans $U_1 \otimes U_{k-1}$; qui ne sont autres que $x_i \otimes C(x_1, ..., \hat{x}_i, ..., x_k)$ pour $1 \leq i \leq k$. Ces k éléments étant tous égaux après application de m, on obtient le résultat.
Le point 4 découle des points 1 et 3.
Pour le point 5 : l'inclusion $\mathrm{Im}(1 - m\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}}) \subset \mathrm{Ker}(\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}})$ découle directement du point 2 ; quant à l'autre inclusion, elle est immédiate : $x = x - m\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}}(x)$ si $\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}}(x) = 0$.
On montre maintenant le point 3.

On rappelle que $\phi = (\phi_1, \phi_2) = (1 - \tau, \overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}} \otimes 1 - 1 \otimes \overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}})$.
Soit $C(x_1, \cdots, x_i) \otimes C(x_{i+1}, \cdots, x_k) \in \oplus_{i=1}^{k-1} U_i \otimes U_{k-i}$. Son image par $\lambda\phi_1$ donne

$$\frac{-i}{k} C(x_{i+1}, \cdots, x_k) \otimes C(x_1, \cdots, x_i) + \frac{k-i}{k} C(x_1, \cdots, x_i) \otimes C(x_{i+1}, \cdots, x_k),$$

et par $\lambda\phi_2$ donne

$$\frac{i}{k} C(x_1, \cdots, x_i) \otimes C(x_{i+1}, \cdots, x_k) + \frac{i}{k} C(x_{i+1}, \cdots, x_k) \otimes C(x_1, \cdots, x_i) - f_i,$$

où f_i est l'élément suivant ; on note $\overline{x} := x_{i+1}, \cdots, x_k$, $\overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}}(C(\overline{x})) = \sum_{(\overline{x})} C(\overline{x}^1) \otimes C(\overline{x}^2)$ et $j(\overline{x}^1)$ la longueur de la liste $\overline{x}^1$. Alors,

$$f_i := (1 + \tau) \sum_{(\overline{x})} \frac{1 + j(\overline{x}^1)}{k} m(C(x_1, \cdots, x_i) \otimes C(\overline{x}^1)) \otimes C(\overline{x}^2).$$

On a $f_i = 0$ si $i > 1$, sinon

$$f_1 := \frac{1}{k}(1 + \tau) \sum_{(\overline{x})} C(x_1, \overline{x}^1) \otimes C(\overline{x}^2) = \frac{1}{k} \overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}}(C(x_1, \cdots, x_k)).$$

D'autre part,

$$\nabla_{\mathrm{Sh}} m(C(x_1, \cdots, x_i) \otimes C(x_{i+1}, \cdots, x_k)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 1\,; \\ \frac{1}{k} \overline{\nabla}_{\mathrm{Sh}}(C(x_1, \cdots, x_k)) & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

□

Revenons sur la Définition 6.0.6. Les éléments de $V_{\leq n}$ sont des éléments primitifs de ∇. À ce titre, et en vertu de l'Exemple 1.1.26, demander au coproduit d'être un morphisme d'algèbres implique que sur $T(V_{\leq n})$, ∇ est le *shuffle*-coproduit $\nabla_{\mathrm{Sh}} : T(V_{\leq n}) \to T(V_{\leq n}) \otimes T(V_{\leq n})$.
Pour un coproduit ∇ dans $\mathbf{DGA}_0$ coassociatif, si $v \in V$ est dans $\mathrm{Ker}(\overline{\nabla})$ alors dv aussi. On suppose maintenant que ∇ n'est plus nécessairement coassociatif ou cocommutatif sur V_{n+1}. Si $v \in \mathrm{Im}(1 - m\overline{\nabla})_{n+1}$ alors $dv \in \mathrm{Im}(1 - m\overline{\nabla})_n = \mathrm{Ker}(\overline{\nabla})_n$. Ainsi, $d((1 - m\overline{\nabla})V_{n+1}) \subset L(V_n)$. En conséquence, quitte à remplacer V_{n+1} par $(1 - m\overline{\nabla})V_{n+1}$, la condition (6.6) est satisfaite si (6.5) et (6.7) le sont ; par voie de conséquence, si (6.7) l'est.

Lemme 6.0.8. *[Ani89, Corollary 3.12 et Proposition 5.5] Soit $\mathcal{A} := (A = TV, \nabla, G_1, G_2, V)$ une dg-bigèbre à homotopie près. On suppose qu'elle vérifie la condition n-good. Alors, il existe une dg-algèbre à homotopie près $(A, \nabla^{n+1}, G_1^{n+1}, G_2^{n+1}, V^{n+1})$ qui étend $\mathcal{A}$ et qui vérifie la condition $(n+1)$-good. De plus, il y a une homotopie-dérivation $F^{n+1} : \nabla \simeq \nabla^{n+1}$ qui satisfait $F^{n+1}(a) = 0$ pour $|a| < n$, $a \in A$.*

Démonstration. Posons $q = 1 - \epsilon : A \to A^+$ et $q' = q^{\otimes 2} \oplus q^{\otimes 3} : A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \to (A^+)^{\otimes 2} \oplus (A^+)^{\otimes 3}$.
Soient V^{n+1}, $A^{n+1} = T(V^{n+1}) \subset A$, $\nabla^{n+1} : A^{n+1} \to A^{n+1} \otimes A^{n+1}$ et $F^{n+1} : A \to A \otimes A$ définis

par :

$$\nabla^{n+1}(v) = \nabla(v) \quad \text{pour} \quad |v| \leq n \tag{6.9}$$
$$\nabla^{n+1}(v) = \nabla(v) - \lambda\phi\overline{\nabla}(v) \quad \text{pour} \quad |v| = n+1 \tag{6.10}$$
$$F^{n+1}(v) = \lambda\phi\lambda q'(G_1(v), G_2(v)) \quad \text{pour} \quad |v| = n, n+1 \tag{6.11}$$
$$F^{n+1}(v) = 0 \quad \text{pour} \quad |v| > n+1 \tag{6.12}$$
$$\nabla^{n+1}(v) = \nabla(v) - F(dv) \quad \text{pour} \quad |v| > n+1 \tag{6.13}$$
$$V_k^{n+1} = V_k \quad \text{pour} \quad |v| \neq n+1, n+2 \tag{6.14}$$
$$V_k^{n+1} = (1 - m\overline{\nabla})V_k \quad \text{pour} \quad |v| = n+1, n+2. \tag{6.15}$$

La coassociativité et la cocommutativité de ∇^{n+1} sur $V^{n+1}_{\leq n+1}$

Posons ϕ^{n+1} comme l'application ϕ où l'on a remplacé ∇_{Sh} par ∇^{n+1}. Alors on a sur $V^{n+1}_{\leq n+1}$:

$$\phi_{\nabla^{n+1}}\overline{\nabla}^{n+1} = \phi_{\nabla^{n+1}}(\overline{\nabla} - \lambda\phi\overline{\nabla}) = \phi(\overline{\nabla} - \lambda\phi\overline{\nabla}) = (\phi - \phi\lambda\phi)\overline{\nabla} = 0.$$

par le point 4 du Lemme 6.0.7.

Homotopie-dérivation entre ∇^{n+1} et ∇

Sur $(V^{n+1})_{\leq n+1}$ on a :

$$dq^{\otimes 2}G_1 + q^{\otimes 2}G_1 d = \nabla - \tau\nabla = \phi_1\overline{\nabla}$$
$$dq^{\otimes 3}G_2 + q^{\otimes 3}G_2 d = (\nabla \otimes 1)\nabla - (1 \otimes \nabla)\nabla = \phi_2\overline{\nabla}.$$

Ainsi, utilisant le fait que λ et ϕ commutent avec d, car μ,τ et ∇_{Sh} commutent avec d, ainsi que le point 4 du Lemme 6.0.7, on obtient :

$$dF^{n+1} + F^{n+1}d = \lambda\phi(dq'(G_1, G_2) + q'(G_1, G_2)d) = \lambda\phi\lambda\phi\overline{\nabla} = \lambda\phi\overline{\nabla},$$

sur $(V^{n+1})_{\leq n+1}$. On étend F^{n+1} comme homotopie-dérivation. Le résultat est clair par construction de ∇^{n+1}. Ainsi, en vertu du Corollaire 1.1.7, ∇^{n+1} étant étendu comme morphisme d'algèbre, F^{n+1} est une homotopie entre ∇ et ∇^{n+1}.

La coassociativité et la cocommutativité à homotopies près de ∇^{n+1} sur $T(V^{n+1})$

Les dérivations G_1^{n+1} et G_2^{n+1} découlent directement du Lemme suivant.

Lemme 6.0.9. *[Ani89, Lemme 5.1] Soient f,g,h : $(TV, d) \to (B, d)$ trois morphismes de dg-algèbres qui coïncident sur $V_{\leq n}$. Soient F et G deux homotopies-dérivations entre f et g, et entre h et g respectivement. Alors il y a une homotopie-dérivation H entre f et h telle que $H = F - G$ sur $T(V_{\leq n})$.*

En effet, F^{n+1} est une homotopie-dérivation entre ∇ et ∇^{n+1} ; G_1 est une homotopie-dérivation entre ∇ et $\tau\nabla$; τF^{n+1} est une homotopie-dérivation entre $\tau\nabla$ et $\tau\nabla^{n+1}$. On procède de manière similaire pour G_2^{n+1}. Ainsi, sur $V_{\leq n}$ on a :

$$G_1^{n+1} = -F^{n+1} + G_1 + \tau F^{n+1} \tag{6.16}$$
$$G_2^{n+1} = -(\nabla^{n+1} \otimes 1 - 1 \otimes \nabla^{n+1})F^{n+1} - (F^{n+1} \otimes 1 - 1 \otimes F^{n+1})\nabla + G_2. \tag{6.17}$$

□

Lemme 6.0.10. *Soit $\mathcal{A} := (A = TV, \nabla, G_1, G_2, V)$ une dg-bigèbre à homotopie près. On suppose qu'elle vérifie la condition n-good$^+$ pour une application $S : A \to A$. Alors, il existe une dg-algèbre à homotopie près $(A, \nabla^{n+1}, G_1^{n+1}, G_2^{n+1}, S^{n+1}, V^{n+1})$ qui étend $\mathcal{A}$ et qui vérifie la condition $(n+1)$-good$^+$. De plus, il y a une homotopie-dérivation $F^{n+1} : \nabla \simeq \nabla^{n+1}$ et une homotopie-anti-dérivation $\Gamma^{n+1} : S \simeq S^{n+1}$ qui satisfont $F^{n+1}(a) = 0$ et $\Gamma^{n+1}(a) = 0$ pour $|a| < n$, $a \in A$.*

Démonstration. On ne s'intéresse qu'à la construction de S^{n+1} et Γ^{n+1}, le reste étant fait dans le Lemme 6.0.8.
Rappelons que $(V^{n+1})_k = V_k$ pour $k \leq n$. Soit $S^{n+1} = S - R^{n+1}$ où $R^{n+1} = \mu(1 \otimes S)\nabla^{n+1} - \eta\epsilon$. Alors, $R^{n+1} = 0$ sur $V_{\leq n}$. Sur $(V^{n+1})_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\mu(1 \otimes S^{n+1})\nabla^{n+1} &= \mu(1 \otimes S)\nabla^{n+1} - \mu(1 \otimes R^{n+1})\nabla^{n+1} \\
&= \mu(1 \otimes S)\nabla^{n+1} - R^{n+1} \\
&= \mu(1 \otimes S)\nabla^{n+1} - \mu(1 \otimes S)\nabla^{n+1} + \eta\epsilon \\
&= \eta\epsilon.
\end{aligned}$$

Soit F^{n+1} l'homotopie entre ∇ et ∇^{n+1}, i.e. $dF^{n+1} + F^{n+1}d = \nabla - \nabla^{n+1}$. En posant $\Gamma^{n+1} = -\mu(1 \otimes S)F^{n+1}$ on obtient l'homotopie recherchée. En effet,

$$d\Gamma^{n+1} + \Gamma^{n+1}d = -\mu(1 \otimes S)(dF^{n+1} + F^{n+1}d) = \mu(1 \otimes S)(\nabla^{n+1} - \nabla) = R^{n+1} = S - S^{n+1}.$$

Par construction F^{n+1} vérifie $F^{n+1} = 0$ sur $(V^{n+1})_{<n} \cup (V^{n+1})_{>n+1}$. Ainsi, il en est de même pour Γ^{n+1}.
On étend ensuite S^{n+1} sur $T(V_{\leq n})$ comme anti-morphisme d'algèbre et on étend Γ^{n+1} comme homotopie-anti-dérivation. L'égalité $\mu(S^{n+1} \otimes 1)\nabla^{n+1} = \eta\epsilon$ sur $(V^{n+1})_{\leq n+1}$ est une conséquence directe de la coassociativité de ∇^{n+1} sur $(V^{n+1})_{\leq n+1}$. □

Lemme 6.0.11. *Soit $(A = TV, \nabla, G_1, S)$ une dg-algèbre de Hopf cocommutative à homotopie G_1 près et d'antipode S. On suppose que (A, ∇, G_1, S, V) vérifie la condition 1-good$^+$. Alors, il y a un coproduit ∇' et une antipode S' tels que (A, ∇', S') est une dg-algèbre de Hopf cocommutative. De plus, il y a une homotopie-dérivation $F : \nabla \simeq \nabla'$ et une homotopie-anti-dérivation $\Gamma : S \simeq S'$.*

Démonstration. Une itération du Lemme 6.0.10 donne pour chaque $n \geq 1$ une dg-bigèbre à homotopie près $(A, \nabla^{n+1}, G_1^{n+1}, G_2^{n+1}, S^{n+1}, V^{n+1})$ qui est n-good$^+$. On définit alors, $\nabla'(v) = \nabla^n(v)$ et $S'(v) = S^n(v)$ pour $|v| = n$. On a : $\mu(1 \otimes S')\nabla' = \eta\epsilon$. L'homotopie-dérivation F est définie comme $\sum_{n \geq 1} F^n$ et l'homotopie-antidérivation Γ est définie comme $\sum_{n \geq 1} \Gamma^n$. □

Proposition 6.0.12. *Soit $\mathbb{Q} \subset R$ et soit X un ensemble simplicial 1-réduit. Alors, il existe un coproduit ∇' et une antipode S' sur $\Omega C_* X$ tels que $(\Omega C_*(X), \nabla', S')$ est une dg-algèbre de Hopf cocommutative. De plus, il a un homotopie-dérivation $F : \nabla_0 \simeq \nabla'$ et une homotopie anti-dérivation $\Gamma : S_0 \simeq S'$, où ∇_0 est le coproduit de Baues (4.1) et S_0 est l'antipode résultante.*

Démonstration. Comme rappelé à la Section 4.2 le coproduit ∇_0 est cocommutatif à homotopie près notée ici G_1. On applique le Lemme 6.0.11 à $(\Omega C_*(X), \nabla_0, G_1, 0, S, s^{-1} C_*^+ X)$ qui satisfait la condition 1-good$^+$. □

Bibliographie

[Ada56] J. F. Adams. On the cobar construction. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42 :409–412, 1956. 26

[AH56] J. F. Adams and P. J. Hilton. On the chain algebra of a loop space. *Comment. Math. Helv.*, 30 :305–330, 1956. 69, 70

[Ani89] David J. Anick. Hopf algebras up to homotopy. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3) :417–453, 1989. 78, 80, 81

[Bau80] H. J. Baues. Geometry of loop spaces and the cobar construction. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 25(230) :ix+171, 1980. 54

[Bau81] H. J. Baues. The double bar and cobar constructions. *Compositio Math.*, 43(3) :331–341, 1981. 10, 36, 54

[Bau98] Hans-Joachim Baues. The cobar construction as a Hopf algebra. *Invent. Math.*, 132(3) :467–489, 1998. 10, 36, 53, 54, 56, 77

[BF04] Clemens Berger and Benoit Fresse. Combinatorial operad actions on cochains. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 137(1) :135–174, 2004. 53, 55

[BV81] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky. Gauge algebra and quantization. *Phys. Lett. B*, 102(1) :27–31, 1981. 7

[CM00] Alain Connes and Henri Moscovici. Cyclic cohomology and Hopf algebra symmetry. *Lett. Math. Phys.*, 52(1) :1–28, 2000. Conference Moshé Flato 1999 (Dijon). 9, 41, 44

[Coh76] Frederick Cohen. The homology of C_{n+1}-spaces, $n \geq 0$, in the homology of iterated loop spaces. Lecture Notes in Math.(Vol.533) :207–351, 1976. 7, 8, 39, 70

[CS] M Chas and Dennis Sullivan. String topology. *arXiv :math.GT/9911159*. 7

[DCV13] Gabriel C. Drummond-Cole and Bruno Vallette. The minimal model for the Batalin-Vilkovisky operad. *Selecta Math. (N.S.)*, 19(1) :1–47, 2013. 39

[EK98] Pavel Etingof and David Kazhdan. Quantization of Lie bialgebras. II, III. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(2) :213–231, 233–269, 1998. 39

[FTVP04] Yves Felix, Jean-Claude Thomas, and Micheline Vigué-Poirrier. The Hochschild cohomology of a closed manifold. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (99) :235–252, 2004. 7

[GCTV12] Imma Gálvez-Carrillo, Andrew Tonks, and Bruno Vallette. Homotopy Batalin-Vilkovisky algebras. *J. Noncommut. Geom.*, 6(3) :539–602, 2012. 39

[Get94] E. Getzler. Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories. *Comm. Math. Phys.*, 159(2) :265–285, 1994. 7, 8, 38, 39, 75

[GJ94] Ezra Getzler and J. D. S. Jones. Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces, March 1994. 29

[GM08] Gerald Gaudens and Luc Menichi. Batalin-Vilkovisky algebras and the J-homomorphism. *Topology Appl.*, 156(2) :365–374, 2008. 75

[GS10] Jeffrey Giansiracusa and Paolo Salvatore. Formality of the framed little 2-discs operad and semidirect products. In *Homotopy theory of function spaces and related topics*, volume 519 of *Contemp. Math.*, pages 115–121. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. 39

[Gug82] V. K. A. M. Gugenheim. On a perturbation theory for the homology of the loop-space. *J. Pure Appl. Algebra*, 25(2) :197–205, 1982. 61, 62

[GV95] Murray Gerstenhaber and Alexander A. Voronov. Homotopy G-algebras and moduli space operad. *Internat. Math. Res. Notices*, (3) :141–153 (electronic), 1995. 32, 39

[Hil55] P. J. Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. *J. London Math. Soc.*, 30 :154–172, 1955. 71

[HPS07] Kathryn Hess, Paul-Eugène Parent, and Jonathan Scott. A chain coalgebra model for the James map. *Homology Homotopy Appl.*, 9(2) :209–231, 2007. 56, 57

[Kad03] T. Kadeishvili. Cochain operations defining Steenrod $\smile_i$-products in the bar construction. *Georgian Math. J.*, 10(1) :115–125, 2003. 56

[Kad04] T. Kadeishvili. Measuring the noncommutativity of DG-algebras. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 119(4) :494–512, 2004. Topology and noncommutative geometry. 9

[Kad05] T. Kadeishvili. On the cobar construction of a bialgebra. *Homology Homotopy Appl.*, 7(2) :109–122, 2005. 9, 39, 41, 42, 43

[Kas95] Christian Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. 24

[KS95] Y. Kosmann-Schwarzbach. Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids. *Acta Appl. Math.*, 41(1-3) :153–165, 1995. Geometric and algebraic structures in differential equations. 7

[KS02] T. Kadeishvili and S. Saneblidze. The twisted cartesian model for the double path fibration. *ArXiv Mathematics e-prints*, October 2002. 56

[KS05] Tornike Kadeishvili and Samson Saneblidze. A cubical model for a fibration. *J. Pure Appl. Algebra*, 196(2-3) :203–228, 2005. 56

[LR10] Jean-Louis Loday and María Ronco. Combinatorial Hopf algebras. In *Quanta of maths*, volume 11 of *Clay Math. Proc.*, pages 347–383. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. 33

[LZ93] Bong H. Lian and Gregg J. Zuckerman. New perspectives on the BRST-algebraic structure of string theory. *Comm. Math. Phys.*, 154(3) :613–646, 1993. 7

[May92] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992. Reprint of the 1967 original. 51, 52, 53

[Men04] Luc Menichi. Batalin-Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras. *K-Theory*, 32(3) :231–251, 2004. 9, 41, 44, 45

[Men09] Luc Menichi. Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology. *Bull. Soc. Math. France*, 137(2) :277–295, 2009. 7

[Mil66] R. James Milgram. Iterated loop spaces. *Ann. of Math. (2)*, 84 :386–403, 1966. 60

[ML95] Saunders Mac Lane. *Homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition. 68

[MS02] James E. McClure and Jeffrey H. Smith. A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture. In *Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000)*, volume 293 of *Contemp. Math.*, pages 153–193. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002. 39

[MS03] James E. McClure and Jeffrey H. Smith. Multivariable cochain operations and little n-cubes. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(3) :681–704 (electronic), 2003. 53, 55

[Rog09] Claude Roger. Gerstenhaber and Batalin-Vilkovisky algebras ; algebraic, geometric, and physical aspects. *Arch. Math. (Brno)*, 45(4) :301–324, 2009. 7

[Ser51] Jean-Pierre Serre. Homologie singuliere des espaces fibres. *Annals of Mathematics*, 54(3) :pp. 425–505, 1951. 56

[Šev10] Pavol Ševera. Formality of the chain operad of framed little disks. *Lett. Math. Phys.*, 93(1) :29–35, 2010. 39

[SU02] S. Saneblidze and R. Umble. Diagonals on the permutahedra, multiplihedra and associahedra. *ArXiv Mathematics e-prints*, September 2002. 56

[SU11] S. Saneblidze and R. Umble. Morphisms of a-infinity bialgebras and applications. *ArXiv e-prints*, June 2011. 56

[SW03] Paolo Salvatore and Nathalie Wahl. Framed discs operads and Batalin-Vilkovisky algebras. *Q. J. Math.*, 54(2) :213–231, 2003. 7

[Swe69] Moss E. Sweedler. *Hopf algebras*. W.A.Benjamin, Inc., 1969. 23

[Tra08] Thomas Tradler. The Batalin-Vilkovisky algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(7) :2351–2379, 2008. 7

[TT00] D. Tamarkin and B. Tsygan. Noncommutative differential calculus, homotopy BV algebras and formality conjectures. *Methods Funct. Anal. Topology*, 6(2) :85–100, 2000. 7, 39, 75

[TZ04] Thomas Tradler and Mahmoud Zeinalian. On the cyclic deligne conjecture. *arXiv :math/0404218v2 [math.QA]*, 2004. 7

l'université nantes angers le mans

PÔLE DE RECHERCHE ET D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Alexandre QUESNEY

Un relèvement d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur la double construction cobar

A lift of a Batalin-Vilkovisky algebra structure on the double cobar construction

Résumé

Dans une première partie, on établit des résultats structuraux sur la construction cobar, visant à obtenir un relèvement homotopique explicite d'une structure de BV-algèbre sur la double construction cobar. Ces résultats interviennent à différentes itérations de la construction cobar. En conclusion, nous obtenons par descente de structures, un critère à l'obtention d'une structure de BV-algèbre homotopique (à la Gerstenhaber-Voronov) sur la double construction cobar $\Omega^2 C$ d'une G-cogèbre homotopique C, ceci en terme de co-opérations structurelles de C.
Dans une seconde partie, nous appliquons le critère précédent sur la G-cogèbre homotopique $C_*(X)$, où $C_*(X)$ est le complexe de chaînes simpliciales sur un ensemble simplicial X. La structure de G-cogèbre homotopique considérée sur $C_*(X)$ est telle que la double construction cobar $\Omega^2 C_*(X)$ est un modèle pour les lacets doubles $\Omega^2|X|$. Nous donnons ensuite des résultats de comparaisons entre la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky obtenue sur la double construction cobar $\Omega^2 C_*(X)$ lorsque X est une double suspension et celle sur $H_*(\Omega^2|X|)$ induite par l'action diagonale du cercle sur $\Omega^2|X|$. Pour finir, lorsque l'anneau des coefficients est $\mathbb{Q}$, nous déformons la structure de dg-algèbre de Hopf sur la construction cobar de Baues $\Omega C_*(X)$ en une structure de dg-algèbre de Hopf *involutive* (∇', S'). On obtient alors une structure de BV-algèbre homotopique sur la double construction cobar $\Omega(\Omega C_*(X), \nabla', S')$ pour tout ensemble simplicial X.

Mots clés

Construction cobar, G-algèbre homotopique, algèbre de Batalin-Vilkovisky, suspension simpliciale, algèbre de Hopf, espace de lacets pointés.

Abstract

In a first part we establish some structural results on the cobar construction. The goal is to obtain a homotopy BV-algebra structure on the double cobar construction. We provide a criterion for obtaining a homotopy BV-algebra (à la Gerstenhaber-Voronov) on the double cobar construction $\Omega^2 C$ of homotopy G-coalgebra C. This involves the structural co-operations of the homotopy G-coalgebra C.
In a second part, we apply the previous criterion to the homotopy G-coalgebra $C_*(X)$.
The homotopy G-coalgebra structure that we consider on the simplicial chain complex $C_*(X)$ is such that the resulting double cobar construction $\Omega^2 C_*(X)$ is a model for the double loop space $\Omega^2|X|$. We obtain a BV-algebra structure on $\Omega^2 C_*(X)$ when X is a double suspension. We give comparison results between this BV-algebra structure on $\Omega^2 C_*(X)$ and the BV-algebra structure on $H_*(\Omega^2|X|)$ that is given by the diagonal action of the circle. Finally, when $\mathbb{Q}$ is the coefficient ring, we deform the Hopf dg-algebra structure on the Baues cobar construction $\Omega C_*(X)$ into an *involutive* Hopf dg-algebra structure (∇', S'). Then we obtain a homotopy BV-algebra structure on the double cobar construction $\Omega(\Omega C_*(X), \nabla', S')$ for any simplicial set X.

Key Words

Cobar construction, homotopy G-algebra, Batalin-Vilkovisky algebra, simplicial suspension, Hopf algebra, loop spaces.